量子論的回転系とサニャック効果の観測可能性について

松本隆志　尾高一彦

平成28年3月

防衛大学校理工学研究報告　第53巻　第2号　別刷

防衛大学校理工学研究報告
第53巻　第2号
平成28年3月

＜論　文＞

量子論的回転系とサニャック効果の観測可能性について

（野口　泰明 教授に捧ぐ）

松本　隆志*　　　　尾高　一彦**

(平成 27 年 5 月 22 日受付； 平成 27 年 7 月 8 日受理)

Quantum Rotating Frames and on the Observability of Sagnac Effect

(Dedicated to Professor Yasuaki Noguchi)

By Takashi MATSUMOTO* and Kazuhiko ODAKA**

Treating rotating frames (vielbein) as dynamical variables, a quantum system of a particle in rotating frames is constrain one with a gauge symmetry. Therefore, the Sagnac effects, that is, the interference pattern of probability amplitude is dependent on the angular velocity of rotating frames, are not observed from the requirement that the physical states are gauge invariant. Then, this requirement should be reexamined from the point of view of the quantum theory of measurement. We recognize the existence of the spontaneous symmetry breaking of the rotational symmetry due to the mapping from quantum informations to macrovariables. In consequence of this symmetry breaking, the requirement of gauge invariance can not be imposed to the whole system including the detector, and then the Sagnac effects are observable.

Keywords: Rotating frames, Sagnac effect, Quantum vielbein, Theory of measurement, Spontaneous symmetry breaking

1.　序論

サニャック (Sagnac) 効果とは、回転する系で二つに振り分けられ互いに逆向きに周回した光の干渉縞が回転系の角速度に依存する現象である[1)]。この現象は、量子力学の確率振幅でも観測され[2)]、ニュートン (Newton) 力学でのコリオリ (Coriolis) 力の効果として違和感なく理解される[1)3)]。これは量子力学においても座標系は力学変数として扱われないためで、この点について今まで特に注意が払われたことはない。

一方、正準量子化[4)5)]あるいは正準変換群の誘導表現[6)]を基礎にした正統的な量子重力理論では、重力を表す計量、もしくは多脚場が量子化の対象である。すなわち、座標系も量子論的に扱われる。そこでは、重力理論の持つ一般座標変換に対する不変性は保持され、そのため複雑な第一種拘束条件が課される。（量子論が基礎で古典論はその結果でしかないが、本稿では慣習的な言い方をする。）これが量子重力理論の構成を困難にする一つの要因である。また、その困難の一つに一般座標変換不変な量子論に正統的コペンハーゲン（Copenhagen）解釈を適用した時、現在観測されるような重力効果がどのような経緯で出現するのかという観測の問題がある[7)]。

本稿の目的は、座標変換に対し不変な非相対論的量子力学において、座標系も量子論的に扱った時、座標系依存性を示すサニャック効果が観測される経緯を考察し、測定装置[8)]の設置と測定過程に於ける自発的対称性の破れの重要性を示すことにある。ここでの自発的対称性の破れは、測定過程で状態（波動関数）の可干渉性が壊れるためであり、場の量子論に於けるもの[4)9)]と起因は違う。

* 防衛大学校　理工学研究科後期課程（１４期）
** 防衛大学校　応用科学群　応用物理学科　教授

本稿の構成は以下の通りである。第 2 章では、外力が作用していない質点のニュートン力学において基底（座標系）も力学変数とし、ディラック (Dirac) に従い拘束系の正準形式[5)]を構成する。これにより座標変換の不変性に起因する第一種拘束条件（ゲージ対称性）が現れることを示す。通常のようにゲージ不変量のみを観測可能量とする取り扱いでは、質点は自由粒子的に振る舞い、コリオリ力のような座標系に依存した現象は現れない。第 3 章では、この力学系をディラックの量子化法[5)]に従い扱う。この手法では、物理的状態の条件として、状態のゲージ不変性が要求される。この要求のため、サニャック効果は観測不可能となる。そこで、ゲージ変換の演算子が定義出来ない事情が必要となる。第 4 章では、第 3 章での議論を踏まえ、フォン・ノイマン (von Neumann) の測定模型[8)]を援用し、測定過程に於いて状態の可干渉性の壊れがゲージ変換のユニタリー性を壊し、自発的対称性の破れを起こすことを示す。これにより、サニャック効果は観測可能となる。第 5 章では、結果と玩具的模型を使った考察の意義をまとめる。

本稿では自然単位系 ($\hbar = 1$) を採用する。

2. 回転系に於ける質点の正準形式

回転座標系に於ける基底 $\mathbf{e}_k(t)$ は $\sum_I e_k{}^I(t)\mathbf{e}_I$ である。$\mathbf{e}_I$ は慣性系での基底とし時間に依存しない。また、$\sum_k e_k{}^I(t) e_k{}^J(t) = \delta^{IJ}$ 及び $\sum_I e_i{}^I(t) e_j{}^I(t) = \delta_{ij}$ より、$e_k{}^I(t)$ は $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 行列の成分である。以後、一致した添字に関しては和を取ることにし、$\sum_k, \sum_I$ を省略する。一般相対性理論との対応では、$e_i{}^I(t)$ は多脚場であり、局所慣性系と一般座標系をつなぐ重要な力学変数で、ディラック場も含む理論では最も基本的な物理量である。

回転座標系に於いて、質量 m の質点の座標を $x_i(t)$ とすると、真の力が働いていない場合の運動方程式は

$$m\ddot{x}_i(t) = -2m\dot{x}_j(t)\dot{e}_j{}^I(t)e_i{}^I(t) - m x_j(t)\ddot{e}_j{}^I(t)e_i{}^I(t) \tag{1}$$

であり、右辺が慣性力（コリオリ力、遠心力）の項である。ただし、$\dot{} := d/dt$, $\ddot{} := d^2/dt^2$ である。この運動方程式 (1) に関するラグランジアン $\mathcal{L}$ は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} := \frac{m}{2}&\Big(\dot{x}_i(t)e_i{}^I(t) + x_i(t)\dot{e}_i{}^I(t)\Big)\\ &\times\Big(\dot{x}_j(t)e_j{}^I(t) + x_j(t)\dot{e}_j{}^I(t)\Big)\end{aligned} \tag{2}$$

である。通常は、$e_i{}^I(t)$ を力学変数とはしないが、量子重力理論を鑑みると、$e_i{}^I(t)$ も力学変数とする方が望ましい。$e_i{}^I(t)$ を力学変数としても、(2) のオイラー (Euler)・ラグランジュ (Lagrange) 方程式からは (1) 以外の新たな情報はない。また、(2) は大局的（時間に依らない）$\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 変換

$$x_i(t)g_{ij} = x'_j(t), \qquad \mathbf{g} \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R}) \tag{3}$$

あるいは

$$e_i{}^I(t)g_{ij} = e'_j{}^I(t) \tag{4}$$

に対し不変である。$\mathbf{g}$ は g_{ij} を成分とする行列。また、

$$e_i{}^I(t)\dot{e}_j{}^I(t) =: A^0_{ij}(t) \tag{5}$$

とおくと、(2) は

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{m}{2}&\Big(\delta_{ij}\frac{d}{dt} + A^0_{ij}(t)\Big)x_j(t)\\ &\times\Big(\delta_{ik}\frac{d}{dt} + A^0_{ik}(t)\Big)x_k(t)\end{aligned} \tag{6}$$

と書け、$A^0_{ij}(t)$ をゲージ場となぞらえることが出来る。ゲージ変換は

$$\begin{aligned}x'_j(t) =& U_{ij}(t)x_i(t),\\ A'^0_{ij}(t) =& U_{ki}(t)A^0_{kl}(t)U_{lj}(t) + U_{ki}(t)\dot{U}_{kj}(t)\end{aligned} \tag{7}$$

である。ただし、運動項がないので $A^0_{ij}(t)$ は純ゲージ場であり、$U_{ij}(t)$ は $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 行列の成分である。

次に、$e_i{}^I(t)$ も力学変数とし、ラグランジアン (2) を使い正準形式を構成するが、これは特異系である。そこで、ディラックの拘束系の扱い[5)]に従い行う。$x_i(t)$ の正準運動量 $p_i(t)$ は

$$p_i(t) = m(\dot{x}_i(t) + e_i{}^I(t)\dot{e}_j{}^I(t)x_j(t)) \tag{8}$$

である。一方 $e_i{}^I(t)$ の正準運動量 $\pi_i{}^I(t)$ は

$$\pi_i{}^I(t) = m x_i(t)(\dot{x}_k(t)e_k{}^I(t) + \dot{e}_k{}^I(t)x_k(t)) \tag{9}$$

となり、(8) より、$e_j{}^I(t)\pi_i{}^I(t) = x_i(t)p_j(t)$ という第一次拘束条件を得る。$e_k{}^I(t)$ は $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 行列の成分であることを考慮し、添字を反対称化 ${}_{[i\ j]}$ する。これにより、拘束条件は

$$R_{ij} := e_{[i}{}^I(t)\pi_{j]}{}^I(t) + x_{[i}(t)p_{j]}(t) \approx 0 \tag{10}$$

となる。ただし、$\approx$ は弱等号である。正準量同士のポアソン (Poisson) 括弧式は

$$\{x_i(t), p_j(t)\} = \delta_{ij}, \qquad \{e_i{}^I(t), \pi_j{}^J(t)\} = \delta_{ij}\delta_{IJ} \tag{11}$$

なので、$R_{ij}(t)$ と力学変数 $x_i(t), p_i(t), e_i{}^I, \pi_i{}^I(t)$ とのポアソン括弧式は

$$\begin{aligned}\{x_i(t), R_{jk}(t)\} &= \delta_{ik}x_j(t) - \delta_{ji}x_k(t),\\ \{p_i(t), R_{jk}(t)\} &= \delta_{ik}p_j(t) - \delta_{ji}p_k(t)\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}\{e_i{}^I(t), R_{jk}(t)\} &= \delta_{ik}e_j{}^I(t) - \delta_{ij}e_k{}^I(t),\\ \{\pi_i{}^I(t), R_{jk}(t)\} &= \delta_{ik}\pi_j{}^I(t) - \delta_{ij}\pi_k{}^I(t)\end{aligned} \tag{13}$$

となる。また、$R_{ij}(t)$ 同士のポアソン括弧式は

$$\begin{aligned}\{R_{ij}(t), R_{kl}(t)\} =& - \delta_{il}R_{jk}(t) + \delta_{ik}R_{jl}(t)\\ &- \delta_{jk}R_{il}(t) + \delta_{jl}R_{ik}(t)\end{aligned} \tag{14}$$

となり閉じている。系のハミルトニアンは自由粒子のハミルトニアン

$$H = \frac{1}{2m}p_i(t)p_i(t) \tag{15}$$

と一致するので、新たな拘束条件は生じない。よって拘束条件 (10) は第一種拘束条件であり、$R_{ij}(t)$ はゲージ変換の生成子である。そして、全ハミルトニアンは

$$H_T = H + \frac{1}{2}\theta_{ij}(t)R_{ij}(t), \quad \theta_{ij}(t) = -\theta_{ji}(t) \tag{16}$$

となる。$\theta_{ij}(t)$ はラグランジの未定係数であり、ゲージの自由度となる。$x_i(t)$ の運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{x}_i(t) = \{x_i(t), H_T\} &= \frac{1}{m}p_i(t) + \theta_{ji}(t)x_j(t),\\ \dot{p}_i(t) = \{p_i(t), H_T\} &= -\theta_{ij}(t)p_j(t)\end{aligned} \tag{17}$$

より

$$\begin{aligned}\ddot{x}_i(t) = \{\frac{1}{m}p_i(t) - \theta_{ij}(t)x_j(t), H_T\} =\\ -2\theta_{ij}(t)\dot{x}_j(t) - \theta_{ij}(t)\theta_{jk}(t)x_k(t)\end{aligned} \tag{18}$$

となる。一方 $e_i{}^I(t)$ に関しては

$$\begin{aligned}\dot{e}_i{}^I(t) = \{e_i{}^I(t), H_T\} &= \theta_{ji}(t)e_j{}^I(t),\\ \ddot{e}_i{}^I(t) = \{\dot{e}_i{}^I(t), H_T\} &= \theta_{ji}(t)\theta_{jk}(t)e_k{}^I(t)\end{aligned} \tag{19}$$

である。これらより運動方程式 (1) が導かれる。また、

$$\theta_{ij}(t) = e_i{}^I(t)\dot{e}_j{}^I(t) \tag{20}$$

より、ゲージの自由度と座標系の関係を得る。$\theta_{ij}(t)$ は、ゲージ場 (5) でもある。

ところで、ゲージ対称性を持つ系では、ゲージ変換により動く軌道上の点は同一視するので、観測可能な量はゲージ不変量（ディラックの観測可能量）に限られる。即ち、$x_i(t)e_i{}^I(t) =: x^I(t),\ p_i(t)e_i{}^I(t) =: p^I(t)$ と言った量が観測可能量である。観測可能量に対する運動方程式は

$$\begin{aligned}\dot{x}^I(t) = \{x^I(t), H_T\} &= \frac{1}{m}p^I(t),\\ \dot{p}^I(t) = \{p^I(t), H_T\} &= 0\end{aligned} \tag{21}$$

となり、慣性力の効果は観測出来ない。そこで、$e_i{}^I(t)$ を力学変数として扱い、なおかつ実際の座標系に依る測定結果を再現するためには、ゲージに依存する量も観測可能量とし、ゲージの自由度に物理的意味を与える必要がある。しかし、古典論ではこれを行う論理はない。そこで、次の章で量子論を考察する。

3. 量子論的回転系に於ける質点の量子力学

同時刻正準交換関係を

$$[\hat{x}_i(t), \hat{p}_j(t)] = i\delta_{ij}, \qquad [\hat{e}_i{}^I(t), \hat{\pi}_j{}^J(t)] = i\delta_{ij}\delta_{IJ} \tag{22}$$

と設定する。他の交換関係は零である。^は演算子を表す。また、$e_k{}^I(t)$ は SO$(3, \mathbf{R})$ の元の成分であったことを考慮し $\hat{\pi}_i{}^I(t)$ を直接扱うことは避け、$\hat{R}_{ij}(t)$ を使う。そこで、演算子との交換関係は

$$\begin{aligned}[\hat{x}_i(t), \hat{R}_{jk}(t)] =& i\delta_{ik}\hat{x}_j(t) - i\delta_{ji}\hat{x}_k(t),\\ [\hat{p}_i(t), \hat{R}_{jk}(t)] =& i\delta_{ik}\hat{p}_j(t) - i\delta_{ji}\hat{p}_k(t)\end{aligned} \tag{23}$$

$$[\hat{e}_i{}^I(t), \hat{R}_{jk}(t)] = i\delta_{ik}\hat{e}_j{}^I(t) - i\delta_{ij}\hat{e}_k{}^I(t) \tag{24}$$

となる。また、ゲージ変換の生成子 $\hat{R}_{ij}(t)$ 同士の交換関係は

$$\begin{aligned}[\hat{R}_{ij}(t), \hat{R}_{kl}(t)] =& -i\delta_{il}\hat{R}_{jk}(t) + i\delta_{ik}\hat{R}_{jl}(t)\\ & -i\delta_{jk}\hat{R}_{il}(t) + i\delta_{jl}\hat{R}_{ik}(t)\end{aligned} \tag{25}$$

であり、全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_T = \frac{1}{2m}\hat{p}_i(t)\hat{p}_i(t) + \frac{1}{2}\theta_{ij}(t)\hat{R}_{ij}(t) \tag{26}$$

である。

ディラックの量子化手法では、状態が物理的状態 $|\Psi_{\mathrm{Ph}}\rangle$ であるための条件として、状態のゲージ不変性

$$\hat{R}_{ij}(t)|\Psi_{\mathrm{Ph}}\rangle = 0 \tag{27}$$

が要求される。この条件 (27) は、量子重力理論では、理論構成の出発点とする重要なもの[5)7)]である。

まず、ハイゼンベルク (Heisenberg) 描像を採用する。$\hat{e}_j{}^J(t)$ は時間発展により SO$(3, \mathbf{R})$ の性質を壊さ

ないことを要求すると、$\theta_{ij}(t)$ は c 数関数に限られるであろう。これにより

$$[\hat{e}_j{}^J(t), \frac{d^n \hat{e}_i{}^I(t)}{dt^n}] = 0, \qquad n \in \mathbf{N} \tag{28}$$

となるので、$[\hat{e}_j{}^J(t), \hat{e}_i{}^I(t')] = 0$ である。時刻 $t = 0$ で $\hat{e}_i{}^I(t)$ を対角化した状態の集合 $\{|\mathbf{e}\rangle\}$ の各成分は $\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ の元に対応する。そこから一つ状態を選びそれを原点 $|\mathbf{0}\rangle$ とし、ゲージ関数 $f_i{}^I(t)$ を

$$\hat{e}_i{}^I(t)|\mathbf{0}\rangle = f_i{}^I(t)|\mathbf{0}\rangle, \quad \mathbf{f}(t) \in \mathrm{SO}(3, \mathbf{R}) \tag{29}$$

と導入する。ただし、$\mathbf{f}(t)$ は $f_i{}^I(t)$ を成分とする行列。ゲージ関数 $f_i{}^I(t)$ を一つ選び、理論を構成する。また、$\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 上の 1 点に対応する状態 $|\mathbf{e}\rangle$ に対し、(28) より

$$\begin{aligned} i\dot{f}_i{}^I(t)\langle \mathbf{e}|\mathbf{0}\rangle =& \langle \mathbf{e}|[\hat{e}_i{}^I(t), H_T]|\mathbf{0}\rangle \\ =& i\theta_{ji}(t) f_j{}^I(t)\langle \mathbf{e}|\mathbf{0}\rangle \end{aligned} \tag{30}$$

であるので、$\theta_{ji}(t)$ は

$$\theta_{ji}(t) = f_j{}^I(t)\dot{f}_i{}^I(t) \tag{31}$$

と決まる。ただし、$\langle \mathbf{e}|\mathbf{0}\rangle$ は状態の内積を意味し、$\mathrm{SO}(3, \mathbf{R})$ 上のハール測度 $d\mu(\mathbf{e})$ に対する $\delta-$ 関数である。

全ハミルトニアン (26) を用いた $\hat{x}_i(t), \hat{p}_i(t)$ の運動方程式は

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{x}_i(t)}{dt} &= [\hat{x}_i(t), \hat{H}_T] = \frac{1}{m}\hat{p}_i(t) + \theta_{ij}(t)\hat{x}_j(t), \\ \frac{d\hat{p}_i(t)}{dt} &= [\hat{p}_i(t), \hat{H}_T] = -\theta_{ij}(t)\hat{p}_j(t) \end{aligned} \tag{32}$$

となり、古典的運動方程式 (17) に対応する。

ところで、状態 $f_i{}^I(t)$ の選択は場の量子論に於ける自発的対称性の破れ[4)]と対応させることが出来る。これは、

$$\begin{aligned} &\langle \mathbf{e}|[\hat{e}_i{}^I(t), \hat{R}_{jk}(t)]|\mathbf{0}\rangle = \\ &\Big(i\delta_{ik} f_j{}^I(t) - i\delta_{ij} f_k{}^I(t)\Big)\langle \mathbf{e}|\mathbf{0}\rangle \neq 0 \end{aligned} \tag{33}$$

となることより、対称性 (4) が破れたことは明らかである。しかし、場の量子論と異なり、ユニタリー非同値な真空の中から一つ選択し、それを基に理論を構成するという意味ではない。この段階では、異なる状態はユニタリー変換で繋ぐことが出来るので、量子力学的には一つ状態を選択することは出来ない。よって、$f_i{}^I(t)$ に物理的意味を与えることも出来ない。

サニャック効果を議論するために、シュレーディンガー (Schrödinger) 描像に移行する。まず、時間発展をゲージ変換に依る時間発展 $\hat{U}_G(t)$ とゲージ不変な時間発展 $\hat{U}_I(t)$ に分ける。

$$\begin{aligned} i\frac{d}{dt}\hat{U}_G(t) =& \frac{1}{2}\theta_{ij}(t)\hat{R}_{ij}\hat{U}_G(t), \\ i\frac{d}{dt}\hat{U}_I(t) =& \frac{1}{2m}\hat{p}_i\hat{p}_i\hat{U}_I(t) \end{aligned} \tag{34}$$

$[\hat{U}_G(t), \hat{U}_I(t)] = 0$ であるので、全時間発展は $\hat{U}_T(t) = \hat{U}_G(t)\hat{U}_I(t)$ である。$t = 0$ における質点の位置演算子を対角化した状態を $|\mathbf{x}\rangle \otimes |\mathbf{e}\rangle$ とする。通常のシュレーディンガー描像での波動関数は

$$\langle \mathbf{e}| \otimes \langle \mathbf{x}|\hat{U}_T(t)|\psi\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle \tag{35}$$

であるが、

$$\Big(\langle \mathbf{e}| \otimes \langle \mathbf{x}|\hat{U}_G(t)\Big)\Big(\hat{U}_I(t)|\psi\rangle \otimes |\mathbf{0}\rangle\Big) \tag{36}$$

と分け、回転系上の位置を強調する。波動関数は

$$\psi(\mathbf{x}^f, t) = \langle \mathbf{x}^f(t)|\hat{U}_I(t)|\psi\rangle \tag{37}$$

と書く。ただし、$\langle \mathbf{e}|$ は $\langle \mathbf{f}(t)|$ と決まるので落とした。$\mathbf{x}^f(t)$ の成分表示は $x_j^f(t) = x_i f_i{}^j(t)$ である。$|\mathbf{x}^f(t)\rangle$ をシュレーディンガー描像での x^f- 表示と呼ぶ。そこで、$f_i{}^j(t)$ を通した時間依存性が状態 $\langle \mathbf{x}^f(t)|$ には含まれるので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{x}^f(t)| = \theta_{ij}(t) x_i^f \nabla_{x_j}^f \langle \mathbf{x}^f(t)| \tag{38}$$

を考慮すると、

$$\begin{aligned} &\Big(i\frac{\partial}{\partial t}\langle \mathbf{x}^f(t)|\Big)|\psi(t)\rangle + \langle \mathbf{x}^f(t)|\Big(i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle\Big) \\ &= \Big(-\frac{1}{2m}\nabla_{x_i}^f\nabla_{x_i}^f + i\theta_{ij}(t)x_i^f\nabla_{x_j}^f\Big)\psi(\mathbf{x}^f, t) \end{aligned} \tag{39}$$

となり、シュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}^f, t) = \Big(-\frac{1}{2m}\nabla_{x_i}^f\nabla_{x_i}^f + i\theta_{ij}(t)x_i^f\nabla_{x_j}^f\Big)\psi(\mathbf{x}^f, t) \tag{40}$$

である。この結果は一見、回転している座標系から観測すればサニャック効果は観測可能であるかのように見える。しかし、サニャック効果の観測可能性を示すには不十分である。物理的状態の条件 (27) が適用されると、$\theta_{ij}(t) = 0$ のみとなり、慣性系での量子力学に限られ、サニャック効果は観測されない。これはハイゼンベルグ描像の結論と同じである。

4.　測定装置と新たな自発的対称性の破れの機構

前章でみたように、ゲージ関数の違いがユニタリー演算子によって結ばれる場合は物理的状態の条件 (27) よりサニャック効果は観測されない。ゲージ関数の違いがユニタリー演算子によって結ばれない機構は、有限自由度では起りえない。そこで、無限自由度を近似的な意味も含め考える。

まずフォン・ノイマンの測定過程の考察に従い、測定対象としての質点 $(\hat{x}_i, \hat{p}_i)$ の他に、測定装置のプローブとしての質点 $(\hat{q}_i, \hat{k}_i)$ を導入する。全ハミルトニアンは

$$\hat{H}_T = \hat{H}_S + \hat{H}_D + \hat{H}_I + \frac{1}{2}\theta_{ij}(t)\hat{R}_{ij} \tag{41}$$

とし、各ハミルトニアンは

$$\begin{aligned} \hat{H}_S &= \frac{1}{2m}\hat{p}_i\hat{p}_i \\ \hat{H}_D &= \frac{1}{2M}\hat{k}_i\hat{k}_i + \hat{V}_\omega(\hat{q}_i\hat{q}_i) \\ \hat{H}_I &= K\hat{x}_i\hat{k}_i \end{aligned} \tag{42}$$

である。$\hat{R}_{ij}$ にはプローブからの寄与も測定対象の質点と同様な形で含まれ、各ハミルトニアンは $\hat{R}_{ij}$ と可換である。

測定装置全体は ω_{ij} で回転運動しているとする。ただし、$\omega_{ij} = -\omega_{ji}$。装置内でのプローブの速度は $\hat{k}_i + \omega_{ij}\hat{q}_j$ であるので、ハミルトニアン $\hat{H}_D$ を、

$$\begin{aligned} \hat{H}_D = \frac{1}{2M}&\Big(\hat{k}_i + M\omega_{ij}\hat{q}_j\Big)\Big(\hat{k}_i + M\omega_{ij}\hat{q}_j\Big) \\ &-\omega_{ij}\hat{q}_j\hat{k}_i - M\frac{\omega_{ji}\omega_{jk}}{2}\hat{q}_i\hat{q}_k + \hat{V}_\omega(\hat{q}_i\hat{q}_i) \end{aligned} \tag{43}$$

と整理する。回転運動に伴う動き以外は大きくはないと仮定し、第 1 項を無視する。また、遠心力の項である第 3 項は $\hat{V}_\omega(\hat{q}_i\hat{q}_i)$ と相殺させる。外部変数 ω_{ij} を持つ $\hat{V}_\omega(\hat{q}_i\hat{q}_i)$ の導入により、$\mathrm{SO}(3,\mathbf{R})$ に関する大局的、及び局所的対称性は $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})\big(=\mathrm{U}(1)\big)$ 対称性へと縮小される。これは回転軸方向が固定されるためである。以後の対称性は $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ である。

$\hat{H}_I$ は測定対象とプローブとの相互作用項で $t=0$ から $t=\Delta t$ の間だけ作用する。簡略化のため $\Delta t K = 1$ とする。また、フォン・ノイマンの考察同様、測定対象系はプローブからの反作用を受けないと近似する。これらは、測定対象系は相互作用によって乱されずプローブ系のみ乱され、情報は一方方向に流れることを意味する。ここでの近似は瞬間近似とでもいうべきもので、極限 $(\Delta t \to 0, K \to \infty)$ で成立する。

これらの仮定を踏まえると、測定対象系のシュレーディンガー方程式はすでに求めた (40) と同じ式

$$\begin{aligned} i\frac{\partial}{\partial t}\psi(\mathbf{x}^f, t) = \Big(&-\frac{1}{2m}\nabla^f_{x_i}\nabla^f_{x_i} + i\big(\omega_{ij}+\epsilon_{ij}(t)\big)x^f_i\nabla^f_{x_j}\Big) \\ &\times\psi(\mathbf{x}^f, t) \end{aligned} \tag{44}$$

である。ただし、$\epsilon_{ij}(t) := \theta_{ij}(t) - \omega_{ij}$ である。

一方、プローブの状態 $|\xi^\omega(t)\rangle$ に関する波動関数 $\xi^\omega(\mathbf{q}^f, t) := \langle\mathbf{q}^f(t)|\xi^\omega(t)\rangle$ のシュレーディンガー方程式は

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi^\omega(\mathbf{q}^f, t) = \Big(-iKx^f_i\nabla^f_{q_i} + i\epsilon_{ij}q^f_i\nabla^f_{q_j}\Big)\xi^\omega(\mathbf{q}^f, t) \tag{45}$$

である。$\epsilon_{ij}(t) = 0$ とし、測定装置と座標系を同期させると、

$$i\frac{\partial}{\partial t}\xi^\omega(\mathbf{q}^f, t) = -iKx^f_i\nabla^f_{q_i}\xi^\omega(\mathbf{q}^f, t) \tag{46}$$

となる。

プローブのシュレーディンガー方程式 (46) を、初期条件 $t=0,\ \psi(\mathbf{x}^f)\xi^\omega_r(\mathbf{q}^f)$ として解く。測定はプローブの位置であることを考慮して、

$$|\xi^\omega_r(\mathbf{q}^f)|^2 \sim \delta^3(\mathbf{q}^f - \mathbf{r}^f) \tag{47}$$

とする。$\mathbf{r}^f$ はプローブの初期位置である。これにより、プローブとしての質点の存在確率は

$$\begin{aligned} \Delta V_{q^f}\int&\Big|\psi(\mathbf{x}^f,t)\Big|^2\Big|\xi^\omega_r(\Delta\mathbf{q}^f - \mathbf{x}^f)\Big|^2 d^3x^f \\ &\sim \Delta V_{q^f}\Big|\psi(\Delta\mathbf{q}^f, t)\Big|^2 \end{aligned} \tag{48}$$

となり、測定対象系の存在確率を知ることが出来る。$\Delta\mathbf{q}^f = \mathbf{q}^f - \mathbf{r}^f$ で、ΔV_{q^f} は $\mathbf{q}^f$ 近傍の無限小体積である。

ここで、2 つの点を注意しておく。動径方向の自由度と回転方向の自由度に分け考える。第 1 点は、$\mathbf{r}^f = 0$ とした時、$\mathbf{q}^f$ の角度方向には基準値がないため、$\mathbf{x}^f$ の角度方向の自由度に制限がつかない。そのため、サニャック効果は議論出来ない。第 2 点目は、$\mathbf{r}^f \neq 0$ の時、(48) に於ける $\xi^\omega_r(\Delta\mathbf{q}^f - \mathbf{x}^f)$ の成分表記

$$\xi^\omega_r(\Delta\mathbf{q}^f - \mathbf{x}^f) \sim \delta^3\big((\Delta q_i - x_i){f_i}^j\big) \tag{49}$$

より分かるように、ゲージ関数は因子化できる。そのため、(44) と (45) に共通な ϵ_{ij} による項からの $\xi^\omega_r(\Delta\mathbf{q}^f - \mathbf{x}^f)$ への寄与は因子化のため情報を持たな

い。これにより、同期させた時 ($\epsilon_{ij}=0$) と同じ結果となり、座標系（ゲージ）依存性はなく、物理的意味のある ω_{ij} のみ現れる。

上記の測定過程は一見有限自由度の議論のため、座標系間の $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ ユニタリー変換性は保持され、サニャック効果の議論は出来ないかにみえる。しかし、すでに初期値としてのプローブの量子力学的位置情報と測定対象系からの影響に依る量子力学的変化の情報は古典的情報として扱われている。これらの古典化に関する過程はフォン・ノイマンの議論では不問（先送り）にされている。しかし、これらの過程には増幅器が必要で、無限とみなせる自由度が含まれている。

そこで、量子情報の古典化の過程を、増幅器を無限自由度とみなせる多粒子の量子系とし、相互作用は大局的対称性 $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ を保つと仮定し考察する。仮定より、粒子ごとに定義された角運動量の加法性も保持されるので、$\hat{R}_{ij}$ の増幅器の演算子は角運動量である。一つの増幅器の状態は、粒子数には依らない量で特徴付けられるであろうから、構成粒子の重心 ($\hat{\mathbf{Q}}_n$) を取るのが自然である。プローブに対し q^f-表示を採用したので、重心に対しても Q^f-表示を取る。

$$|\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega, \quad s=0,\ e \tag{50}$$

0 は基底状態を、e は励起状態を表す。$(\cdots)$ は構成粒子の重心からの相対的運動状況を示す。ここでの増幅過程の情報移行については、前段と同様な仮定をし、増幅器のみに変化をもたらす。即ち、

$$\begin{gathered}\xi^\omega(\Delta\mathbf{q}^f\Big(-\mathbf{x}^f\Big))\otimes\prod_n|\mathbf{Q}_n^f; e(\cdots)\rangle^\omega \ \rightarrow \\ \xi^\omega(\Delta\mathbf{q}^f\Big(-\mathbf{x}^f\Big))\otimes|\mathbf{Q}_h^f; 0(\cdots)\rangle^\omega\prod_{n\neq h}|\mathbf{Q}_n^f; e(\cdots)\rangle^\omega\end{gathered} \tag{51}$$

である。$\big(-\mathbf{x}^f\big)$ がない場合は、初期値を与える場合で、ある場合は量子力学的変化の測定である。プローブとの相互作用によって励起状態から基底状態への遷移を引き起こす増幅器はプローブの近傍 ($\mathbf{Q}_h^f\sim\mathbf{q}^f$) のものである。異なる重心にある増幅器の状態は、充分多くの自由度のため重ね合わせの原理

$$|\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega + |\mathbf{Q}_m^f; s(\cdots)\rangle^\omega \tag{52}$$

は成立せず、そのため干渉は起こらない。即ち、重心を表す $\mathbf{Q}_n^f$ はマクロ的変数[10)]であり、重心ごと違ったヒルベルト (Hilbert) 空間があると考える。この遷移により引き起こされる増幅過程により、プローブとしての粒子が位置 $\mathbf{r}^f$ 又は $\mathbf{q}^f$ にあると古典的に確認出来る。一方、この増幅過程では測定対象系には影響を与えないので、(48) は変わらず、測定対象系の波動関数の可干渉性は壊れない。増幅器の具体的模型[10)]については本稿では検討しない。

増幅器の大局的 $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ 変換を考える。一つの増幅器に注目し、その状態

$$|\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega\otimes|\mathbf{0}\rangle_0 \tag{53}$$

に対し、変換演算子 $\hat{U}(\alpha)=:\exp(i\alpha_{ij}\hat{R}_{ij})$ を作用させる。増幅器の部分は

$$\exp\Big(i\alpha_{ij}\hat{L}_{ij}^f\Big)|\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega \tag{54}$$

である。$\hat{L}_{ij}^f$ は増幅器の構成粒子の角運動量演算子の総和であり、そのため重心も回転を引き起こす。即ち、(54) は

$$|\mathbf{R}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega \tag{55}$$

と変換される。ここでの $\mathbf{R}(\alpha)$ は回転の行列である。しかし、$\mathbf{R}(\alpha)\cdot\mathbf{Q}_n^f\neq\mathbf{Q}_n^f$ なので、(55) は $|\mathbf{Q}_n^f; s(\cdots)\rangle^\omega$ と同じヒルベルト空間内にはない。よって、変換演算子 $\hat{U}(\alpha)$ はユニタリー変換としての意味を失い、$\hat{L}_{ij}^f$ はヒルベルト空間内の演算子でなくなる。

以上をまとめると、充分大きな自由度から構成され、その重心によって特徴付けられる増幅器の状態まで考慮したとき、$\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ の各点に対応させた状態は互いにユニタリー非同値である。よって、場の量子論における自発的対称性の破れと機構は違うが、増幅器の充分大きな自由度のため、$\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ の一点に対応した状態の集合と他の点の状態の集合とはユニタリー非同値であり、そのため自発的対称性の破れが生じ、特定の点を選択しなくてはならない。また、増幅器の全角運動量は演算子としての意味を失うので、物理的状態の条件 (27) は課すことが出来ない。そして、ゲージ関数 ${f_i}^I(t)$ を固定する必要がある。

以上の議論より、ニュートン力学に於いて座標系を力学変数として扱わず、観測者の立ち位置とする扱いを量子論的視点から正当化でき、回転している系から見た質点の慣性力効果の観測可能性を示せた。一方、量子力学においては、ゲージの自由度 (座標系) は回転する測定装置のプローブの位置の量子力学的変化 $\Delta\mathbf{q}^f$ に置き換えることが出来、プローブの位置の古典化された情報からサニャック効果の観測が可能となる。

本稿での議論の問題点は相互作用項 $\hat{H}_I$ に運動量演算子が含まれることである。ゲージ対称性は漸近状態

$(t < 0,\ \Delta t < t)$ で定義され、このゲージ変換に対し相互作用 $\hat{H}_I$ は不変である。普通の場合はこれで問題ないが、運動量演算子が含まれている場合（力が速度による場合）は量子論構成上自明でない問題が生じる可能性がある。しかし、本稿の目的を超えるので議論しない。

この章を終えるにあたり、場の量子論に於ける自発的対称性の破れとの類似性をより強調するため、U(1) 対称性を持つゴールドストン (Goldston) 模型をゲージ化したヒッグス (Higgs) 模型[9]との対応を見る。複素スカラー場を極分解する。動径方向の場はオーダーパラメータと物理的ヒッグス粒子に分解され、位相は自発的対称性の破れに伴う南部 (Nambu)・ゴールドストン（NG）粒子である。プローブの自由度も動径方向と角度に分解する。動径方向は初期位置 $\mathbf{r}^f$ とそれからの量子力学的ずれと分解できる。設定時に $\mathbf{r}^f$ はマクロ変数化するのでオーダーパラメータと見なせる。プローブの角度の自由度は、増幅過程で起こる $\mathrm{SO}(2,\mathbf{R})$ の自発的対称性の破れに伴う NG モードであり、NG 粒子に対応する。ヒッグス模型では NG 粒子はゲージ場に吸収されゲージ場を物理的自由度にする。一方、プローブの場合は座標系（ゲージ）の自由度に吸収され、座標系を物理的自由度とするが、NG モードは測定過程によりマクロ変数化するため古典的座標系とみなせる。また、ヒッグス模型では結果はゲージの取り方に依らないが、プローブの場合も、途中経過で取る座標系の固定の仕方には依存せず、測定装置の物理的回転にのみ依る。この対応より、真空のユニタリー非同値性と、増幅過程でのユニタリー性の破れ（可干渉性の壊れ）が同じ役割を果たしていることが読み取れる。

5. 結語

本稿では、外力が作用していない質点のニュートン力学を、座標系も力学変数として扱い、ディラックの拘束系の正準形式を構成した。この系には座標変換に対するゲージ対称性が存在する。この系を量子化し、通常のようにゲージ不変な状態に制限する扱いでは、座標系に依存したサニャック効果は観測出来ないことを示した。次に、状態が対称性を破る自発的対称性の破れの可能性を考察した。しかし、この機構は、有限自由度の量子力学では、異なる座標系上の理論の間にユニタリー変換が存在するので機能しない。そこで、フォン・ノイマンの測定装置の模型を援用し、測定過程に於いて状態の可干渉性の壊れがユニタリー同値性を破り、自発的対称性の破れが機能することを示した。これにより、測定装置の運動と座標系を関係付けることが出来、サニャック効果が観測可能となる。

ここで行った議論を、宇宙論的規模に拡張することは困難であるが、測定過程の重要性は認識出来るであろう。また、他にも、座標系の取り方により観測される結果が変わる場の量子現象[11]は多々期待されている。原則論的には、時空構造が同じ場合一般座標変換不変な理論に対し座標系に依存する現象を期待することは出来ない。

そこで、測定対象としての量子場と測定装置のプローブとしての量子場[11]を導入し、プローブとしての量子場の状態を特定の座標系と同期させる。観測結果は、増幅過程での可干渉性の壊れによる自発的対称性の破れのため、プローブの物理的運動に依る。これにより、座標系の取り方により観測結果が変わる場の量子現象を、一貫した論理で理解できると期待する。そのためのプローブはどのようなものなのか考察する必要がある。

謝辞

著者の一人 尾高は、学科再編時の殺伐としたなか、良き理解者であった野口泰明教授の退官に際し、感謝の気持ちを込めて本稿を捧げる。

参考文献

1) 例えば、“Relativity in Rotating Frames”, eds. G. Rizzi and M.L. Ruggiero, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht(2003).
2) S.A. Werner, J-L. Staudenmann and R. Colella, “Effect of Earth’s Rotation on the Quantum Mechanical Phase of the Neutron”, Phys. Rev. Lett. **42**(1979), pp.1103-1106.
3) Y. Aharonov and G. Carmi,“Quantum aspects of the equivalence principle”, Found. Phys. **3**(1973), pp. 493-498;
J.J. Sakurai, “Comments on quantum-mechanical interference due to the Earth’s rotation”, Phys. Rev. **D21**(1980), pp.2993-2994;
松本隆志, 尾高一彦,“相対論的回転系とゲージ対称性”, 防衛大学校理工学研究報告, **51**(2013), pp.63-67.
4) N.Nakanishi and I.Ojima, “Covariant Operator Formalism of Gauge Theories and Quantum Gravity” (World Scientific publishing, 1990).
5) T.Thiemann,“Modern Canonical Quantum General Relativity” (Cambridge University

Press, 2007).
6) C.J.Isham and A.C.Kakas, “A Group Theoretical Approach to the Canonical Quantisation of Gravity: I. Constraction of the Canonical group”, Class. Quant. Grav. **1**(1984), pp.621-632; “A Group Theoretical Approach to the Canonical Quantisation of Gravity: II. Unitary Representations of the Canonical Group”, Class. Quant. Grav. **1**(1984), pp.633-650.
7) C.Rovelli, “Quantum Gravity” (Cambridge University Press, 2004).
8) J.von Neumann, “Die Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik” (Springer Verlag, 1932).
9) 九後汰一郎, “ゲージ場の量子論 II” (培風館,1989).
10) R.Fukuda, “Stationary Phase and Macrovariable: From Wave to Particle”, Prog. Theor. Phys. Supplement **182** (2009), pp.1-208.
11) 松本隆志, “背景計量下の場の量子論と検出器” (平成２５年度修士論文；独立行政法人　大学評価・学位授与機構提出, 2014.3);
松本隆志, 尾高一彦, “定常加速度系での量子論における局在性”, 防衛大学校理工学研究報告, **52**(2015)No.2, pp.1-10; 及びそこで引用されている原論文.