

1 次元状態和のボゾン型公式と整数の分割における最小除外偶数

(荒井 隆 教授に捧ぐ)

高木 太一郎*

(令和 6 年 7 月 19 日受付; 令和 6 年 11 月 1 日受理)

A bosonic formula for one-dimensional configuration sums and the even minimal excludant in integer partitions (Dedicated to Professor Takashi Arai)

By Taichiro TAKAGI*

We present a solution to a partition theoretic interpretation problem of an alternating sign summation of Gaussian polynomials proposed by G.E. Andrews and D. Newman, which appeared in their study of the even minimal excludant in integer partitions. Our method uses configuration sums over bit sequences, and a non-trivial correspondence between bit sequences and integer partitions with certain restrictions.

Keywords: Gaussian polynomials, Young diagrams, Border strips

1. はじめに

G.E. Andrews と D. Newman は、2020 年に出版された論文 1 において整数の分割に関する minimal excludant (最小除外数) と呼ばれる関数の性質を議論し、その結論にていくつかの予想を述べている。その一つ [Problem II. (1)] は、次の交代和によって定義される多項式

$$B_n(q) = \sum_{r=0}^n (-1)^r \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-r \end{bmatrix}, \quad (1)$$

に対して、その係数がすべて非負であると主張する予想である。ここでガウス多項式 (あるいは q -二項係数) は $0 < m < n$ を満たす整数 m, n に対して

$$\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} = \frac{\prod_{k=1}^n (1 - q^k)}{\prod_{k=1}^m (1 - q^k) \prod_{k=1}^{n-m} (1 - q^k)}, \quad (2)$$

$m = 0$ または $m = n$ に対して 1、それ以外の m, n に対しては 0 と定義されるもので、変数 q についての

$(n - m)m$ 次多項式であり、 $q \rightarrow 1$ とすれば通常の二項係数になる²⁾。

定義 (1) の交代和に戻って具体例を見てみると、

$$\begin{aligned} B_0(q) &= 1, & B_1(q) &= q + q^2, \\ B_2(q) &= 1 + q^2 + q^3 + q^4 + q^5 + q^6, \\ B_3(q) &= q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + 2q^7 \\ &\quad + 2q^8 + 2q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12}, \end{aligned}$$

などとなっており、確かにすべての係数が非負であることが読み取れる。

この予想は、定義 (1) の和において、隣接する 2 項の対すべてに対してその係数が非負であることを示せば証明される。より一般に、 $0 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ を満たす整数 m, n に対して定義される以下の多項式

$$Y^+(n, m) := \begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} n \\ m-1 \end{bmatrix}, \quad (3)$$

の係数がすべて非負であることを示せば十分である。S. Chern は、2023 年に出版された論文 3 において、この非負性がガウス多項式のもつ q -unimodality という

* 防衛大学校 応用科学群 応用物理学科 教授

う性質によって成り立つということを指摘し、これにより [Problem II. (1)] への解答を与えている。

しかし、多項式 (3) の係数がすべて非負であるという主張は、少なくとも 2000 年代の前半には可積分セルオートマトンの分配関数の研究において既知の事実として認識されていた⁴⁾。その理由は、物理学者 H. Bethe による 1 次元量子スピン系の先駆的な研究⁵⁾ において (3) の右辺のガウス多項式を通常の二項係数に置き換えた式が負号を含まない二項係数の積の和と等価であることを表す公式が導出されており、その自然な q 類似が存在したからである⁶⁾。負号を含むものをボゾン型、含まないものをフェルミオン型の公式と呼ぶ。本論文では、これとは別の観点から本節に続く §2. においてフェルミオン型公式を経由せずに漸化式を用いたボゾン型公式 $Y^+(n, m)$ の係数の非負性の直接証明を与える。

一方、本論文の主題は Andrews-Newman によるもう一つの問題 [Problem II. (3)] に関するものである。上述の予想の成立を前提として、この予想は定義 (1) の交代和によって与えられる非負係数多項式 $B_n(q)$ が整数の分割の (その整数を q の指数の冪とする重み付きの) 数え上げを表すものであり、それは最大で n 個の部分を持ち且つ各々の部分が $n+1$ 以下であるような分割全体からなる集合のある部分集合上での数え上げである¹⁾ (enumerates some subset of the partitions into at most n parts each $\leq n+1$) と主張するものである。

よく知られているように、 $0 \leq N \leq (n-m)m$ を満たす整数 N に対してガウス多項式 (2) の N 次項の係数は、自然数 N の分割全体のうち最大で m 個の部分を持ち且つ各々の部分が $n-m$ 以下であるような制限された分割全体の個数を与える²⁾。定義 (1) より

$$\bar{B}_n(q) := \left[\begin{matrix} 2n+1 \\ n \end{matrix} \right] - B_n(q) = \sum_{r=0}^{n-1} (-1)^r \left[\begin{matrix} 2n+1 \\ n-1-r \end{matrix} \right], \quad (4)$$

であるが、多項式 (3) の係数がすべて非負であると仮定すれば、この式の右辺についてもその係数はすべて非負である。中辺第 1 項のガウス多項式が上に述べたような制限された分割全体の重み付きの数え上げであることから、 $\bar{B}_n(q)$ が上述の部分集合の補集合上での数え上げであるという解釈とも整合的であり、予想の成立が期待される。しかし、もしそうであれば「ある部分集合」はどのように特徴づけられるものであるのかという問いがこの問題の本質である。前述の Chern の論文 3 においても、その結論においてこの問題に対

する考察がなされている。そこでは、多項式 $B_n(q)$ の隣接する 2 項の対となる (3) の形の多項式の各々について、それが上に述べたような制限された分割全体の集合のどの部分集合に対応するかの明確な解釈を得たが、その具体的な表式は複雑であり、より単純な対応があるかどうかを尋ねたい、と述べられている。

本論文では §3. 以降において、可積分セルオートマトンの研究 (文献 4) の内容の一部の数学的厳密化を行い、それを応用してこの問題に対する一つの解答を与える。(セルオートマトンとしての時間発展を考えないので、本論文では 0 と 1 からなる有限数列を単にビット列 (bit sequences) と呼ぶことにした。) §3. ではビット列の集合と分配関数 (1 次元状態和) を考察し、最高ウェイト状態と呼ばれる状態に対する分配関数がボゾン型公式で与えられることを確認する。また、ビット列に対するパスの概念を導入し、ビット列の集合をパスの最小値で分類する直和分割について説明する。§4. では、パスの最小値が偶数であるビット列に対する分配関数が $B_n(q)$ となることを示す。§5. では、ビット列の集合と制限された分割全体の集合の間の、ボーダーストリップ分解と呼ばれる操作を用いた非自明な全単射について説明する。これにより上に述べた Chern の求めている「より単純な対応」の一つが得られたと考えられる。§6. では、前節までの結果を統合して上述の Andrews-Newman の問題に対する一つの解答として本論文の主結果である定理 7 を提示し、その具体例を例示する。最後に、§7. で結論と考察を述べる。そこでは問題の背景について説明し、最小除外偶数を指定した整数の分割数の母関数が 1 次元状態和のボゾン型公式を用いて表現されるという事実を示す。

2. 多項式 $Y^+(n, m)$ の係数の非負性

条件 $0 \leq s \leq L$ を満たす整数 s, L に対して定義された、一変数 q を持つある多項式 $G(L, s)$ の族が $s < L$ において漸化式

$$G(L, s) = G(L-1, s) + \sum_{k=1}^s q^{L-k} G(L-k-1, s-k), \quad (5)$$

を満たしている、という状況を考える。もし任意の整数 $L (\geq 0)$ に対する境界条件

$$G(L, 0) = G(L, L) = 1, \quad (6)$$

を課したならば、この境界条件と漸化式 (5) より多項式 $G(L, s) =: X(L, s)$ が任意の $0 \leq s \leq L$ に対して一

意に定まる。実際、 $L-s=0$ ならば境界条件から単項式 1 で、ここから差 $L-s$ を一つずつ増した $X(L, s)$ が漸化式 (5) より順次決まる。この多項式はその構成法よりすべての係数が非負である。

次に、この多項式のひとつの変種を考える。

命題 1 s の範囲を $0 \leq s \leq \lceil L/2 \rceil$ とし、境界条件

$$G(L, 0) = 1, \quad G(2s-1, s) = 0, \quad (7)$$

を課す。この境界条件と漸化式 (5) より多項式 $G(L, s) =: X^+(L, s)$ が任意の $L \geq 0$ および $0 \leq s \leq \lceil L/2 \rceil$ に対して一意に定まる。この多項式 $X^+(L, s)$ はすべての係数が非負である。

証明： s, L に関する帰納法を用いる。まず $s=0$ のとき、仮定より $X^+(L, 0)$ はすべての $L \geq 0$ に対して非負係数多項式（単項式 1）である。つぎに $s > 0$ とし、すべての $\sigma < s, 2\sigma \leq \Lambda$ に対して $X^+(\Lambda, \sigma)$ が非負係数多項式として定まっているとする。漸化式 (5) より

$$X^+(2s, s) = X^+(2s-1, s) + \sum_{k=1}^s q^{2s-k} X^+(2s-k-1, s-k),$$

であるが、仮定より右辺第 1 項は 0 であり、第 2 項はすでに一意に定まっている非負係数多項式の 1 項以上の和である。よって左辺は非負係数多項式として一意に定まる。つぎに $L > 2s$ とし、すべての $\Lambda < L$ に対して $X^+(\Lambda, s)$ が非負係数多項式として定まっているとする。漸化式 (5) より

$$X^+(L, s) = X^+(L-1, s) + \sum_{k=1}^s q^{L-k} X^+(L-k-1, s-k),$$

であるが、仮定より右辺はすでに一意に定まっている非負係数多項式の和である。よって左辺は非負係数多項式として一意に定まる。（証明終わり）

命題 2 これらの多項式は、ガウス多項式によって以下のように与えられる：

$$X(L, s) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$X^+(L, s) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ s-1 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

証明：ガウス多項式は以下の恒等式を満たす²⁾。

$$\begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L \\ L-s \end{bmatrix}, \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L-1 \\ s \end{bmatrix} + q^{L-s} \begin{bmatrix} L-1 \\ s-1 \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} = q^s \begin{bmatrix} L-1 \\ s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L-1 \\ s-1 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

まず (8) を示す。ガウス多項式はその定義より境界条件 (6) を満たす。恒等式 (11) の右辺第 2 項に、恒等式 (12) で L, s を $L-1, s-1$ としたものを代入する。以下、 $k=2, 3, \dots, s-1$ に対して恒等式 (12) で L, s を $L-k, s-k$ としたものを順次代入すれば漸化式 (5) が得られる。多項式 $X(L, s)$ は境界条件と漸化式から一意に定まるので、(8) が成り立つ。つぎに (9) を示す。前述の結果および漸化式 (5) の線型性より、(9) の右辺はこの漸化式を満たす。また、ガウス多項式の定義および恒等式 (10) より、(9) の右辺は境界条件 (7) を満たす。多項式 $X^+(L, s)$ も境界条件と漸化式から一意に定まるので、(9) が成り立つ。（証明終わり）

以上の議論により、 $0 \leq m \leq \lfloor n/2 \rfloor$ を満たす整数 m, n に対して多項式 $Y^+(n, m) = X^+(n, m)$ のすべての係数は非負であることが示された。この帰結となる Andrews-Newman の一つ目の問題に対する解答を定理として提示する。

定理 3 定義 (1) の $B_n(q)$ は非負係数多項式である。

3. ビット列の状態空間と分配関数

本節では $L-s$ 個の 0 と s 個の 1 からなるビット列全体からなる集合を考え、それを 1 次元の統計力学的な系の状態空間とみなして分配関数を考察する。前節で示した多項式 $Y^+(n, m)$ の係数の非負性は、それがこのような分配関数とみなせることから理解される。

まずその集合を

$$\mathcal{H}(L, s) = \{\eta \in \{0, 1\}^L \mid |\eta| = s\} \quad (13)$$

とする。ただし $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_L) \in \{0, 1\}^L$ に対して $|\eta| = \sum_{1 \leq i \leq L} \eta_i$ とした。関数 $H : \{0, 1\}^2 \rightarrow \{0, 1\}$ を $H(0, 1) = 1, H(0, 0) = H(1, 0) = H(1, 1) = 0$ と定義する。ビット列 $\eta \in \mathcal{H}(L, s)$ に対して、そのエネルギーを

$$E(\eta) = \sum_{1 \leq j \leq L-1} jH(\eta_j, \eta_{j+1}) \quad (14)$$

と定め、各エネルギー値ごとにそのエネルギーを持つビット列の個数を与えるような母関数を

$$Z(L, s) = \sum_{\eta \in \mathcal{H}(L, s)} q^{E(\eta)}, \quad (15)$$

によって定義する。以下では統計力学的な描像にもとづき、各々のビット列のことを状態と呼び、この母関数を(1次元)状態和または分配関数と呼ぶことにする。

$$\text{状態 } \eta \in \mathcal{H}(L, s) \text{ に対して、} S(\eta) = (S_i(\eta))_{0 \leq i \leq L} \text{ を}$$

$$S_0(\eta) = 0, \quad S_i(\eta) = S_{i-1}(\eta) + 1 - 2\eta_i \quad (1 \leq i \leq L) \quad (16)$$

によって定める。このような状態の表現は path encoding と呼ばれる⁷⁾。図1を参照せよ。以下では $S(\eta)$ を状態 η に対応するパスと呼ぶことにする。

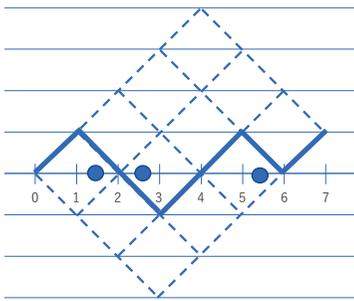


図1 ビット列 $\eta = 0110010$ に対するパス $S(\eta)$ を折れ線で表したもの。 $\eta_i = 1$ となる各位置 i に対して座標目盛 $i-1$ と i の間に印 \bullet を置いた。

集合 $\mathcal{H}(L, s)$ をパスの最小値で分類して以下のように直和分割する：

$$\mathcal{H}(L, s) = \bigsqcup_{\alpha=0}^s \mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s), \quad (17)$$

$$\mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s) = \{\eta \in \mathcal{H}(L, s) \mid \min_{0 \leq i \leq L} S_i(\eta) = -\alpha\}. \quad (18)$$

特に $\mathcal{H}^{(0)}(L, s) =: \mathcal{H}^+(L, s)$ と記し、これに属する状態を最高ウェイト状態と呼ぶ⁴⁾。対応する分配関数を

$$Z^+(L, s) = \sum_{\eta \in \mathcal{H}^+(L, s)} q^{E(\eta)}, \quad (19)$$

と定義する。条件 $0 \leq s \leq \lfloor L/2 \rfloor$ を満たさなければ $\mathcal{H}^+(L, s) = \emptyset$ となるので、 $Z^+(2s-1, s) = 0$ としておく。

命題4 これらの分配関数は、ガウス多項式によって以下のように与えられる：

$$Z(L, s) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix}, \quad (20)$$

$$Z^+(L, s) = \begin{bmatrix} L \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} L \\ s-1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

証明：前節の結果により $Z(L, s) = X(L, s)$ および $Z^+(L, s) = X^+(L, s)$ を示せばよい。すなわちこれらの分配関数が漸化式(5)および対応する境界条件(6)または(7)をそれぞれ満たすことを示せばよい。集合 $\mathcal{H}(L, L)$ は単一の要素 $(1, \dots, 1)$ を持ち、集合 $\mathcal{H}(L, 0)$ および $\mathcal{H}^+(L, 0)$ は単一の要素 $(0, \dots, 0)$ を持つ。これらの要素に対応するエネルギーはいずれもゼロである。また、前述のように $Z^+(2s-1, s) = 0$ である。したがって境界条件は満たされているので、漸化式を示せば十分である。

まず $Z(L, s)$ を考える。 $s < L$ として、集合 $\mathcal{H}(L, s)$ をもっとも右の0の位置で分類して以下のように直和分割する：

$$\mathcal{H}(L, s) = \bigsqcup_{k=0}^s \mathcal{H}_{(k)}(L, s),$$

$$\mathcal{H}_{(k)}(L, s) = \{\eta \in \mathcal{H}(L, s) \mid \max\{\alpha \mid \eta_\alpha = 0\} = L - k\}.$$

これに対応して分配関数は

$$Z(L, s) = \sum_{\eta \in \mathcal{H}_{(0)}(L, s)} q^{E(\eta)} + \sum_{k=1}^s \sum_{\eta \in \mathcal{H}_{(k)}(L, s)} q^{E(\eta)},$$

となる。右辺第1項では $\eta_L = 0$ より $H(\eta_{L-1}, \eta_L) = 0$ 、よって $E(\eta) = \sum_{1 \leq j \leq L-2} jH(\eta_j, \eta_{j+1})$ となる。また $\sum_{1 \leq i \leq L-1} \eta_i = s$ である。すなわち、末尾の0を取り除く操作により $\mathcal{H}_{(0)}(L, s)$ から $\mathcal{H}(L-1, s)$ へのエネルギーを保存する全射があるためこの項が漸化式(5)の右辺第1項に対応する。

右辺第2項では、 k に関する和のそれぞれに対して $\eta_{L-k} = 0, \eta_{L-k+i} = 1 \quad (1 \leq i \leq k)$ より $E(\eta) = L - k + \sum_{1 \leq j \leq L-k-1} jH(\eta_j, \eta_{j+1})$ となる。また $\sum_{1 \leq i \leq L-k-1} \eta_i = s - k$ である。すなわち、末尾の $\underbrace{01\dots1}_k$ を取り除く操作により $\mathcal{H}_{(k)}(L, s)$ から $\mathcal{H}(L-1-k, s-k)$ へのエネルギーを $L-k$ だけ減らす全射があるため、この第2項全体が漸化式(5)の右辺第2項に対応する。したがって分配関数 $Z(L, s)$ は漸化式(5)を満たす。

つぎに、 $Z^+(L, s)$ に対しては $s < \lfloor L/2 \rfloor$ に対して集合 $\mathcal{H}^+(L, s)$ を上と同じように直和分割して考え、 $\mathcal{H}_{(0)}^+(2s, s) = \mathcal{H}^+(2s-1, s) = \emptyset$ に注意すればやはり同じ漸化式を満たすことが示される。(証明終わり)

4. $B_n(q)$ を分配関数とするビット列の状態空間

以下では、最大で s 個の部分を持ち且つ各々の部分が $L-s$ 以下であるような整数の分割全体からなる集

合を

$$\mathcal{P}(L, s) = \{\lambda \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^s \mid L - s \geq \lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_s \geq 0\}$$

と記す。 $\lambda_k > 0$ となる各 λ_k を分割 λ の部分 (part) と呼ぶ。分割 $\lambda \in \mathcal{P}(L, s)$ に対するエネルギー (あるいは重み) を $|\lambda| = \sum_{i=1}^s \lambda_i$ とする。前節で導入した $\mathcal{H}(L, s)$ と $\mathcal{P}(L, s)$ との間にはエネルギーを保存する全単射があり、次節で ($L = 2n + 1, s = n$ の場合に) その具体的操作を与える。

前節での結果によれば、定義 (1) の交代和によって与えられた多項式 $B_n(q)$ は最高ウェイト状態に関する分配関数を用いて $B_n(q) = Z^+(2n+1, n) + Z^+(2n+1, n-2) + Z^+(2n+1, n-4) + \dots$ のように表される。一般に、 $r = 1, 2, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ に対して分配関数 $Z^+(2n+1, n-2r)$ はビット列の集合 $\mathcal{H}(2n+1, n-2r)$ の部分集合上の状態和である。すなわち、我々は整数の分割との対応において、多項式 $B_n(q)$ が集合 $\prod_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{P}(2n+1, n-2r)$ の一部となるある部分集合上の要素の数え上げであることを示したことになる。

しかしながら、Andrews と Newman によるもう一つの予想 [Problem II. (3)] は、すべての分割を単一の集合 $\mathcal{P}(2n+1, n)$ の要素と解釈する主張である。これに答えるためには、分配関数 $Z^+(2n+1, n-2r)$ を (最高ウェイト状態以外の状態も含む) 単一の集合 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ の部分集合上の状態和として解釈し直す必要がある。

この目的のため、我々は以下の命題を提示する。(この命題は柏原のクリスタルによる解釈⁸⁾が可能であるが、本論文ではその説明は省略する。)

命題 5 整数 $L \geq 2$ に対し、直和分割 (17) の定義に現れる集合 $\mathcal{H}^{(*)}(L, *)$ の族を考える。 $1 \leq s \leq \lfloor L/2 \rfloor, 0 \leq \alpha \leq s-1$ に対して、集合 $\mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s-1)$ と $\mathcal{H}^{(\alpha+1)}(L, s)$ との間にはエネルギー (14) を保存する全単射が存在する。

証明：具体的に全単射の構成法を記述する。図 2 を参照せよ。

まず、集合 $\mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s-1)$ から $\mathcal{H}^{(\alpha+1)}(L, s)$ への全射 (f と記す) を以下のように構成する。 $\eta \in \mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s-1)$ とする。このとき $S_L(\eta) = L - 2s + 2 \geq 2, S_{L-1}(\eta) \geq 1$ より、 $S_i(\eta) = -\alpha$ を満たす i は $L-2$ 以下である。もし $S_i(\eta) = -\alpha$ を満たす最大の i が $i = 0$ であるなら、 $\alpha = 0$ であり、 $(\eta_1, \eta_2) = (0, 0)$ である。これを $(1, 0)$ に変える。もし $S_i(\eta) = -\alpha$ を満たす最大の i が $i > 0$ であるなら、 $(\eta_i, \eta_{i+1}, \eta_{i+2}) = (1, 0, 0)$ である。これを $(1, 1, 0)$ に変える。この操作により 1 の数は s

となり、エネルギーの値は変化しない。また、 $j > i$ に対する S_j の値は 2 だけ減ずるが、条件よりその値は $-\alpha - 1$ 以上であり、特に $S_{i+1}(f\eta) = -\alpha - 1$ となる。さらに、 $j \leq i$ に対する S_j の値は変化せず、その値は $-\alpha$ 以上である。

つぎに、集合 $\mathcal{H}^{(\alpha+1)}(L, s)$ から $\mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s-1)$ への全射 (e と記す) を以下のように構成する。 $\eta \in \mathcal{H}^{(\alpha+1)}(L, s)$ とする。このとき $S_L(\eta) = L - 2s \geq 0, S_0(\eta) = 0$ より、 $S_i(\eta) = -\alpha - 1$ を満たす i は 1 以上 $L-1$ 以下である。もし $S_i(\eta) = -\alpha - 1$ を満たす最小の i が $i = 1$ であるなら、 $\alpha = 0$ であり、 $(\eta_1, \eta_2) = (1, 0)$ である。これを $(0, 0)$ に変える。もし $S_i(\eta) = -\alpha - 1$ を満たす最小の i が $i > 1$ であるなら、 $(\eta_{i-1}, \eta_i, \eta_{i+1}) = (1, 1, 0)$ である。これを $(1, 0, 0)$ に変える。この操作により 1 の数は $s-1$ となり、エネルギーの値は変化しない。また、 $j \geq i$ に対する S_j の値は 2 だけ増すため条件よりその値は $-\alpha + 1$ 以上である。さらに、 $j < i$ に対する S_j の値は変化せず、その値は $-\alpha$ 以上であり、特に $S_{i-1}(e\eta) = -\alpha$ である。

また、構成法より f と e が互いに逆写像になっていることは容易に分かる。(証明終わり)

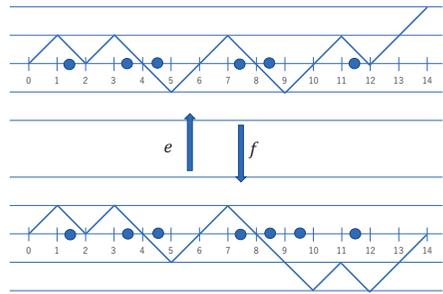


図 2 写像 f と e の説明。折れ線はビット列の状態 η に対するパス $S(\eta)$ の値を表す。対応する η を表すため $\eta_i = 1$ となる各位置 i に対して座標目盛 $i-1$ と i の間に印 \bullet を置いた。

以下ではこの全単射による同値関係を $\mathcal{H}^{(\alpha)}(L, s-1) \cong \mathcal{H}^{(\alpha+1)}(L, s)$ のように表すことにする。これを繰り返し用いることにより $\mathcal{H}^+(2n+1, n-2r) = \mathcal{H}^{(0)}(2n+1, n-2r) \cong \mathcal{H}^{(2r)}(2n+1, n)$ となる。このことを念頭に置いて、状態空間 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ に属するビット列をパスの最小値の偶奇で分類した以下のよう

な直和分割を考える。

$$\mathcal{H}(2n+1, n) = \mathcal{H}_n^{\text{even}} \sqcup \mathcal{H}_n^{\text{odd}},$$

$$\mathcal{H}_n^{\text{even}} = \bigsqcup_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{H}^{(2r)}(2n+1, n), \quad (22)$$

$$\mathcal{H}_n^{\text{odd}} = \bigsqcup_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{H}^{(2r-1)}(2n+1, n). \quad (23)$$

前述の同値関係を用いると

$$\mathcal{H}_n^{\text{even}} \cong \bigsqcup_{r=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{H}^+(2n+1, n-2r),$$

$$\mathcal{H}_n^{\text{odd}} \cong \bigsqcup_{r=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \mathcal{H}^+(2n+1, n-2r+1).$$

である。したがって、交代和 (1) および (4) は以下のような分配関数で表されることになる。

$$B_n(q) = \sum_{\eta \in \mathcal{H}_n^{\text{even}}} q^{E(\eta)}, \quad (24)$$

$$\bar{B}_n(q) = \sum_{\eta \in \mathcal{H}_n^{\text{odd}}} q^{E(\eta)}. \quad (25)$$

すなわち、 $B_n(q)$ はパスの最小値が偶数であるようなビット列についての状態和であり、 $\bar{B}_n(q)$ はパスの最小値が奇数であるようなビット列についての状態和である。これらのビット列の属する集合 $\mathcal{H}_n^{\text{even}}, \mathcal{H}_n^{\text{odd}}$ がいずれも $n+1$ 個の 0 と n 個の 1 を含むあらゆるビット列からなる単一の集合の部分集合であるという事実を再度強調しておく。

5. 制限された分割とビット列の間の非自明な全単射

最大で n 個の部分を持ち且つ各々の部分が $n+1$ 以下であるような整数の分割全体からなる集合 $\mathcal{P}(2n+1, n)$ は、 $n \times (n+1)$ の長方形に（左上の角を共有して）収まるヤング図形全体の集合とみなせる。前節で定義した分割 λ に対するエネルギー $|\lambda|$ は対応するヤング図形の面積に等しい。

ビット列の状態空間 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ と制限された分割の集合 $\mathcal{P}(2n+1, n)$ の間には、自明な全単射があることがすぐに分かる。例えば、図 1 を見るとビット列 $\eta = 0110010 \in \mathcal{H}(7, 3)$ に対するパスが 3×4 の長方形を 2 つに分けており、上側にあるヤング図形の転置は $\lambda = (3, 3, 1) \in \mathcal{P}(7, 3)$ である。しかし、この全単射は以下で述べるエネルギー保存になっていない。（ $E(\eta) = 6 \neq 7 = |\lambda|$ である。）本節では、論文 4 にも

とづき $\mathcal{H}(2n+1, n)$ から $\mathcal{P}(2n+1, n)$ へのエネルギーを保存する全単射の構成法を説明する。この写像を

$$\Phi_n : \mathcal{H}(2n+1, n) \rightarrow \mathcal{P}(2n+1, n), \quad (26)$$

で表す。エネルギーを保存するとは、任意の $\eta \in \mathcal{H}(2n+1, n)$ に対して、定義 (14) によるエネルギーが $E(\eta) = |\Phi_n(\eta)|$ を満たすことである。

まず、 $\eta = (\underbrace{1, \dots, 1}_n, \underbrace{0, \dots, 0}_{n+1})$ に対しては $\Phi_n(\eta) = \emptyset$ とする。（本論文では整数 0 の唯一の分割としての \emptyset を \emptyset で表す。）それ以外のビット列は

$$\eta = (\underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_1}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\beta_1}, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_2}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\beta_2}, \dots, \underbrace{1, \dots, 1}_{\alpha_p}, \underbrace{0, \dots, 0}_{\beta_p}), \quad (27)$$

という形を持つ。ここで p は 2 以上の整数で、 $\sum_{k=1}^p \alpha_k = n$ および $\sum_{k=1}^p \beta_k = n+1$ を満たす。また、 $\alpha_1, \beta_p \geq 0$ とし、その他の α_k, β_k は 1 以上とする。これに対し、 $\Phi_n(\eta)$ を図 3 における最大のヤング図形が表す分割として定める。このヤング図形は、 $p-1$ 個のボーダーストリップ⁹⁾ (2×2 の正方形を含まない歪ヤング図形) からなる。各々のボーダーストリップが長方形の左の辺に接する長さは、 $\alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{p-1}$ であり、上の辺に接する長さは、 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{p-1}$ である。ビット列 η が 0 から始まる場合は $\alpha_1 = 0$ だが、この場合でも一番内側のボーダーストリップは消滅しないこと、およびヤング図形の高さが n の場合に $\alpha_p = 1$ と解釈することに注意しておく。

命題 6 写像 Φ_n は $\mathcal{H}(2n+1, n)$ から $\mathcal{P}(2n+1, n)$ へのエネルギーを保存する全単射である。

証明: まず全単射であることを示す。分割 $\lambda \in \mathcal{P}(2n+1, n)$ が与えられたとして、その逆像を求める。 $n \times (n+1)$ の長方形の外枠の中に λ に対するヤング図形を描いたとする。このヤング図形の左下から右上に向かう境界に沿って 1 つのボーダーストリップを引きはがすと、残りはやはりヤング図形である。これを繰り返すことにより、任意のヤング図形をボーダーストリップに一意に分解することが出来る⁹⁾。この結果、任意の $\lambda \in \mathcal{P}(2n+1, n)$ に対してすべての α_k, β_k ($1 \leq k \leq p$) が一意に定まり、対応するビット列 $\eta = \Phi_n^{-1}(\lambda) \in \mathcal{H}(2n+1, n)$ も一意に定まる。よって Φ_n は単射である。集合 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ と集合 $\mathcal{P}(2n+1, n)$

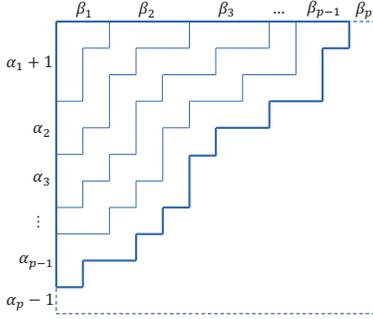


図3 ビット列の状態空間 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ から制限された分割の集合 $\mathcal{P}(2n+1, n)$ への全単射 Φ_n を記述するための図。外枠は $n \times (n+1)$ の長方形。分割は対応するヤング図形で表す。太い線で囲まれた最大のヤング図形は、 $p-1$ 個のボーダーストリップからなる。

の位数は同一であるから、 Φ_n が全射であることも示された。

次にこの写像がエネルギー保存であることを示す。まず、 $\eta = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ ならば $|\Phi_n(\eta)| = |\emptyset| = 0 = E(\eta)$ である。それ以外の場合は、ビット列 η は (27) のように表される。左から k 番目の隣接する 01 対 (左右この順で) の 0 の位置は $\sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i)$ で、これらを $1 \leq k \leq p-1$ で足し合わせたものがこのビット列のエネルギー $E(\eta)$ である。一方、図3においては小さい方から k 番目のボーダーストリップの面積が $\sum_{i=1}^k (\alpha_i + \beta_i)$ であり、これらを $1 \leq k \leq p-1$ で足し合わせたものが最大のヤング図形の面積、すなわち $|\Phi_n(\eta)|$ となる。よって $|\Phi_n(\eta)| = E(\eta)$ である。(証明終わり)

6. Andrews-Newman 問題に対する一つの解答

Andrews-Newman によるもう一つの問題 [Problem II. (3)] に戻る。我々の答えは、彼らの予想「定義 (1) の交代和によって与えられる多項式 $B_n(q)$ は、最大で n 個の部分を持ち且つ各々の部分が $n+1$ 以下であるような分割全体からなる集合のある部分集合上での数え上げである」は正しい、というものである。そして、その部分集合とは、 $n+1$ 個の 0 と n 個の 1 からなるビット列全体からなる集合 $\mathcal{H}(2n+1, n)$ において、対応するパスの最小値が偶数であるようなすべてのビット列からなる部分集合 $\mathcal{H}_n^{\text{even}}$ (その定義は (16), (18) および (22) を参照) を、前節で構成した全単射

Φ_n で写した像 $\Phi_n(\mathcal{H}_n^{\text{even}})$ である。

定義 (18) はパスの最小値が $-\alpha$ であるようなビット列の集合であった。ビット列に対する操作としてこの α を読み取る別の方法を説明する。与えられたビット列から、隣接する 01 対 (左右この順で) をすべて取り除く。このようにして得られたビット列から、さらに隣接する 01 対をすべて取り除く。この操作を繰り返していくと、やがて $(1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ という形に簡約される。このとき、簡約されたビット列に含まれる 1 の数が α である。これを踏まえて、Andrews-Newman の二つ目の問題に対する解答を本論文の主結果としてここに提示する。

定理 7 定義 (1) の $B_n(q)$ は、ボーダーストリップ分解による写像 Φ_n^{-1} で得られるビット列を簡約して 1 が偶数個残る分割 $\lambda \in \mathcal{P}(2n+1, n)$ を重み付きで数え上げた多項式である。

具体例を挙げる。図4、図5、および図6は、 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{even}})$ に属する分割 20 個すべてをヤング図形で表したものである。ボーダーストリップ分解、対応するビット列および簡約されたビット列を併記した。対応する多項式 $B_3(q)$ は

$$B_3(q) = q + q^2 + 2q^3 + 2q^4 + 2q^5 + 3q^6 + 2q^7 + 2q^8 + 2q^9 + q^{10} + q^{11} + q^{12},$$

であったが、それがこれらの分割の重み付きの数え上げとなっていることが確認できる。

比較のため、図7および図8に、 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{odd}})$ に属する分割 15 個すべてを同様に表しておく。

ひとつ注意を述べておく。与えられた整数の分割 λ から写像 Φ_n^{-1} によって対応するビット列を得ることを考えよう。図3から値 α_p を読み取ることを考えると、この写像によって得られたビット列に含まれる最も右の 1 のならびにおける 1 の数は、同一の λ に対しても n によって異なる。よって、前述の方法によって得られた簡約されたビット列に含まれる 1 の数も、その偶奇性も含めて n によって異なる。すなわち、同一の λ に対しても、それが $\Phi_n(\mathcal{H}_n^{\text{even}})$ に含まれるか否かは n によって異なる。特に $\lambda = \emptyset$ の場合を考えると、これは多項式 $B_n(q)$ が n が偶数なら定数項 1 を含み、奇数なら含まないという事実を説明する。

7. 結論および考察

G.E. Andrews と D. Newman による論文 1 の結論で提示されている複数の問題の一部である [Problem

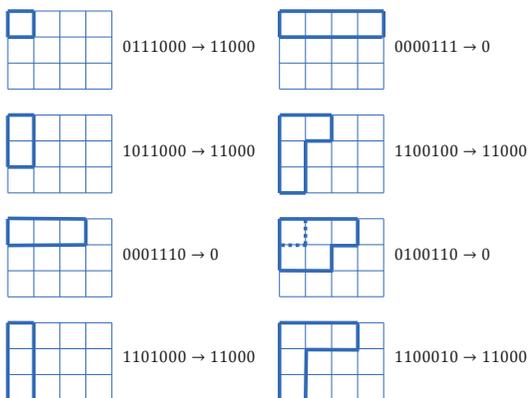


図 4 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{even}})$ に属する分割。単位格子から構成される 3×4 の長方形の枠内に太線で描いたヤング図形で表す。点線でボーストリップ分解を示す。各分割の右に、対応するビット列 \rightarrow 簡約されたビット列を併記してある。エネルギーが 1 から 5 までのもの。

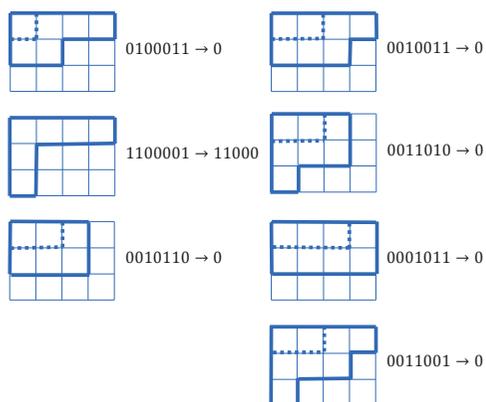


図 5 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{even}})$ に属する分割。エネルギーが 6 から 8 までのもの。

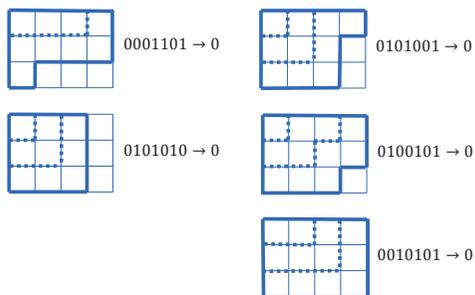


図 6 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{even}})$ に属する分割。エネルギーが 9 から 12 までのもの。

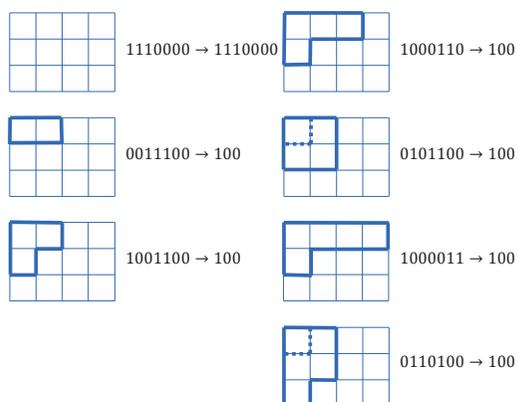


図 7 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{odd}})$ に属する分割。エネルギーが 0 から 5 までのもの。

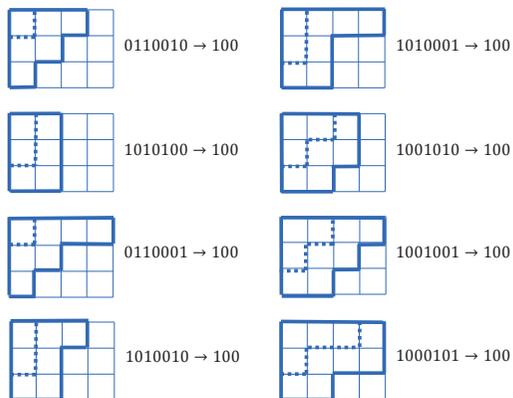


図 8 $\Phi_3(\mathcal{H}_3^{\text{odd}})$ に属する分割。エネルギーが 6 から 10 までのもの。

II. (1) と [Problem II. (3)] に対する解答を与えた。特に、後者に対する解答を与えた定理 7 が本論文の主結果である。以下では、この結論に対するいくつかの考察を行う。

まず、Andrews-Newman の問題の背景を説明する。以下ではある整数の分割 π が部分 $1, 2, \dots, r$ をそれぞれ m_1, m_2, \dots, m_r 個含むとき、 $\pi = r^{m_r} \dots 2^{m_2} 1^{m_1}$ のように表す⁹⁾。($m_k = 0$ となる k に対する k^{m_k} は書かない。 $m_k = 1$ のときの 1 も書かない。) 整数の分割 π に対し、 π の部分として含まれない最小の正の偶数を $\text{mex}_{2,2}(\pi)$ で表す。これは minimal excludant と呼ばれる関数の一例である。例を挙げると、全部で 11 個ある 6 の分割のうち $\text{mex}_{2,2}(\pi) = 2$ となるものが 6 個 ($\pi = 1^6, 31^3, 3^2, 41^2, 51, 6$)、 $\text{mex}_{2,2}(\pi) = 4$ となるものが 4 個 ($\pi = 21^4, 2^2 1^2, 2^3, 321$)、 $\text{mex}_{2,2}(\pi) = 6$ となるものが 1 個 ($\pi = 42$) である。整数 N の分割のうち、 $\text{mex}_{2,2}(\pi)$ が 4 で割り切れないものの数を $p_{2,2}(N)$ とし、4 で割り切れるものの数を $\bar{p}_{2,2}(N)$ とする。例えば $p_{2,2}(6) = 7, \bar{p}_{2,2}(6) = 4$ である。論文 1 の [Problem II] は、以下のような $p_{2,2}(N)$ の母関数の表式を考察している (以下 $|q| < 1$ とする。):

$$F_{2,2}(q) := \sum_{N \geq 0} p_{2,2}(N) q^N = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n} B_n(q)}{\prod_{k=1}^{2n+1} (1 - q^k)}. \quad (28)$$

この公式の導出については後程説明する。

多項式 $B_n(q)$ に対応する分割の集合 $\Phi_n(\mathcal{H}_n^{\text{even}})$ は、最大で n 個の部分を持つので、それに合わせてこの式の右辺の q^{n^2+n} は分割 $(n+1)^n$ の重みを表すと解釈しよう。すると右辺の各項は、分子は $\Phi_n(\mathcal{H}_n^{\text{even}})$ に属するあらゆる分割に対しその n 個の部分すべてに $n+1$ を足した分割 (μ とする)、分母は $2n+1$ 以下の部分からなるあらゆる分割 (ν とする)、の重み付きの数え上げをそれぞれ行っていると解釈できる。したがって $p_{2,2}(N)$ は、あらゆる n に対するこのような分割の対 (μ, ν) で $|\mu| + |\nu| = N$ となるものが合計で幾つあるのかを表していることになる。 $N = 6$ の例に戻ると、これに関わるのは (28) の右辺では $n = 0, 1, 2$ の 3 項で、 $B_n(q)$ に対応する分割の集合を示すと

$$\begin{aligned} \Phi_0(\mathcal{H}_0^{\text{even}}) &= \{\emptyset\}, \\ \Phi_1(\mathcal{H}_1^{\text{even}}) &= \{1, 2\}, \\ \Phi_2(\mathcal{H}_2^{\text{even}}) &= \{\emptyset, 2, 3, 2^2, 32, 3^2\}, \end{aligned}$$

である。 $\Phi_1(\mathcal{H}_1^{\text{even}})$ に属する分割の部分には 2 を、 $\Phi_2(\mathcal{H}_2^{\text{even}})$ に属する分割の部分には 3 をそれぞれ

足すことに注意して、 $|\mu| + |\nu| = 6$ となる分割の対 (μ, ν) を探すと、 $n = 0$ から $(\emptyset, 1^6)$ 、 $n = 1$ から $(3, 1^3), (3, 21), (3, 3), (4, 1^2), (4, 2)$ 、および $n = 2$ から $(3^2, \emptyset)$ が見つかり、合計で $p_{2,2}(6) = 7$ 個あることが確認できる。

ところで、論文 1 の著者は、このような分割の対ではなく「 N の分割で $(\text{mex}_{2,2}(\pi))$ が 4 で割り切れないという元の定義とは異なる) ある性質をもつものが $p_{2,2}(N)$ 個ある」という主張の定理の存在の有無を尋ねている。対 (μ, ν) から単純に部分の合併⁹⁾ $\mu \cup \nu$ をとれば単独の N の分割が得られるが、上述の $N = 6$ の例でもこのやり方では同じ分割 3^2 が 2 つできてしまつてうまくいかないことが分かる。実は、(28) の右辺に対するあらゆる n に対する上述の分割の対 (μ, ν) で $|\mu| + |\nu| = N$ を満たすもの全体と、単独の N の分割全体との全単射を構成して、そのような定理の存在を示すことができる。その詳細については近い将来に報告する予定である。

ここまでは論文 1 の定式化に従って $p_{2,2}(n)$ の母関数について考察したが、本研究で得られた知見を用いればさらに細分化された母関数についてその意味を考察することができる。整数 N の分割のうち、 $\text{mex}_{2,2}(\pi) = 2\alpha + 2$ となるものの数を $p_{2,2}^{(\alpha)}(N)$ としよう。例えば $p_{2,2}^{(0)}(6) = 6, p_{2,2}^{(1)}(6) = 4, p_{2,2}^{(2)}(6) = 1$ である。その母関数は

$$F_{2,2}^{(\alpha)}(q) := \sum_{N \geq 0} p_{2,2}^{(\alpha)}(N) q^N = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n} B_n^{(\alpha)}(q)}{\prod_{k=1}^{2n+1} (1 - q^k)}, \quad (29)$$

である。ただし

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(q) &= \sum_{\eta \in \mathcal{H}^{(\alpha)}(2n+1, n)} q^{E(\eta)} \\ &= \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-\alpha \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-\alpha-1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

とした。(ここで命題 4 および命題 5 の結果を用いた。) $B_n^{(\alpha)}(q)$ は、ボーダーストリップ分解による写像 Φ_n^{-1} で得られるビット列を簡約して 1 が α 個残る分割 $\lambda \in \mathcal{P}(2n+1, n)$ を重み付きで数え上げた多項式である。以下、 $(z; q)_n := \prod_{k=1}^n (1 - zq^{k-1})$ としてこの公式を示そう。(29) の右辺は

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n} B_n^{(\alpha)}(q)}{(q; q)_{2n+1}} = \sum_{n \geq \alpha} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_{2n+1}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-\alpha \end{bmatrix} - (\text{“} \alpha \rightarrow \alpha+1 \text{”}),$$

である。ただし、右辺第 2 項は第 1 項の α を $\alpha+1$ で置き換えたものである。右辺第 1 項はさらに以下のよ

うに書き換えられる：

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq \alpha} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_{2n+1}} \begin{bmatrix} 2n+1 \\ n-\alpha \end{bmatrix} &= \sum_{n \geq \alpha} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_{n-\alpha} (q; q)_{n+\alpha+1}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \frac{q^{(n+\alpha)^2+(n+\alpha)}}{(q; q)_n (q; q)_{n+2\alpha+1}} \\ &= q^{\alpha^2+\alpha} \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n(n+2\alpha+1)}}{(q; q)_n (q; q)_{n+2\alpha+1}} \\ &= \frac{q^{\alpha(\alpha+1)}}{(q; q)_{\infty}}. \end{aligned}$$

最後の行では $(q; q)_{n+2\alpha+1} = (q; q)_{2\alpha+1} (q^{2\alpha+2}; q)_n$ とし、さらに以下のような Cauchy の公式 (文献 2: (2.2.8))

$$1 + \sum_{n \geq 1} \frac{q^{n^2-n} z^n}{(q; q)_n (z; q)_n} = \frac{1}{(z; q)_{\infty}},$$

で $z = q^{2\alpha+2}$ としたものを用いた。(あるいは $n \times (n + 2\alpha + 1)$ の Durfee rectangle を用いて組合せ論的に示すこともできる。) したがって (29) の右辺は

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+n} B_n^{(\alpha)}(q)}{(q; q)_{2n+1}} &= \frac{q^{\alpha(\alpha+1)} - q^{(\alpha+1)(\alpha+2)}}{(q; q)_{\infty}} \\ &= \frac{q^{\alpha(\alpha+1)} (1 - q^{2(\alpha+1)})}{(q; q)_{\infty} q^{2+4+\dots+2\alpha}} \\ &= \frac{1}{\prod_{m=1, m \neq 2(\alpha+1)}^{\infty} (1 - q^m)}, \end{aligned}$$

となる。最後の表式は、部分として 2α 以下のすべての正の偶数をいずれも少なくとも一つ含み、かつ $2(\alpha + 1)$ を部分として含まないようなあらゆる整数の分割を重み付きで足しあげたものと解釈できるので、明らかに $p_{2,2}^{(\alpha)}(N)$ の母関数である。これで (29) が証明された。また、 α をあらゆる非負偶数としてこれを足し合わせることにより Andrews-Newman の公式 (28) が導出される。

前述の $F_{2,2}(q)$ の場合と同様に、(29) の右辺の各項は、分子は $\Phi_n(\mathcal{H}^{(\alpha)}(2n+1, n))$ に属するあらゆる分割に対しその n 個の部分すべてに $n+1$ を足した分割 (μ とする)、分母は $2n+1$ 以下の部分からなるあらゆる分割 (ν とする)、の重み付きの数え上げをそれぞれ行っていると解釈できる。したがって $p_{2,2}^{(\alpha)}(N)$ は、あらゆる n に対するこのような分割の対 (μ, ν) で $|\mu| + |\nu| = N$ となるものが合計で幾つあるのかを表していることになる。この場合にも、このような分割の

対ではなく「 N の分割で $(\text{mex}_{2,2}(\pi) = 2\alpha + 2$ という元の定義とは異なる) ある性質をもつものが $p_{2,2}^{(\alpha)}(N)$ 個ある」という主張の定理の存在を示すことができる。その詳細についても近い将来に報告する予定である。

謝辞

文献 3 の存在を知らせていただき、著者にこの問題に対する関心を持たせていただいた柏原正樹先生に感謝いたします。また、長年にわたり防衛大学校応用物理学科の発展に貢献された荒井隆先生にこの論文を献呈いたします。

参考文献

- 1) G.E. Andrews and D. Newman, *The minimal excludant in integer partitions*, Journal of Integer Sequences **23** (2020) Article 20.2.3.
- 2) G.E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Cambridge Univ. Press, (1984).
- 3) S. Chern, *q-Log-concavity and q-unimodality of Gaussian polynomials and a problem of Andrews and Newman*, Proc. Japan Acad., **99**, Ser. A (2023) 33–36.
- 4) T. Takagi, *Inverse scattering method for a soliton cellular automaton*, Nucl. Phys. B **707** (2005) 577–601.
- 5) H. A. Bethe, *Zur Theorie der Metalle, I. Eigenwerte und Eigenfunktionen der linearen Atomkette*, Z. Physik **71** (1931) 205–231.
- 6) 国場敦夫, *ベーテ仮説と組合せ論*, 朝倉書店 (2011).
- 7) 佐々田槇子, *離散可積分系への確率論的アプローチ*, 日本数学会 2023 年度秋季総合分科会 無限可積分系セッションアブストラクト (2023) 43–65.
- 8) S-J. Kang, M. Kashiwara, K. C. Misra, T. Miwa, T. Nakashima and A. Nakayashiki, *Affine crystals and vertex models*, Int. J. Mod. Phys. **A7** (suppl. 1A), (1992) 449–484.
- 9) I.G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford, Clarendon Press, (1995).