

A.A.Cournot の偶然論

—哲学・数学から経済学へ—

武藤功

1. 序
2. Cournot の偶然論
3. 大数の法則
4. Cournot の経済学方法論
5. Cournot から Walras へ
6. 終わりに

1. 序

Antoine Augustin Cournot(1801-1877)が、数学解析(=微分積分学)のアプローチを経済学に導入して以来、厳密な経済学の表現と推論には数学的手法を用いる伝統が定着してきた。彼は、経済学の領域における主著 *Recherches sur les principes mathématique de la théorie des richesses* (Cournot[1838b], 以下 *Recherches* と略記)において、需要函数の概念に明確な数学的表現を与えた。そしてそれを土台にして、たとえば独占的生産者の均衡条件あるいは寡占市場における均衡条件を導出している。等々……これらの Cournot の成果は、数学解析を用いることによって初めて得られるものである。経済学徒にとってこうした Cournot の洞察は、今日においても多くの研究を誘発しているという意味で重要であるが、そうした成果を得ることを可能にした Cournot の方法上の革新もまた、逸することのできない重要な貢献である。

エコール・ノルマル

Cournot は数学の研究を志して、1821 年に高等師範学校に入学するものの、政治的な理由によって同校は一時閉鎖されてしまった。そのため、翌年 Cournot はソルボンヌに転学し、数学の研究に専心する。G. P. L. Dirichlet はそこで机を並べてたがいに切磋琢磨した親しい学友でもあった。Cournot の数学の才能はやがて S. D. Poisson (1781-1840) の認めるところとなる。Poisson は、確率論を専攻する数学者である。Poisson の推挙によって Cournot はリヨン大学理学部を振り出しに、数学者としての道を歩み始めた。そして 1841 年には、数学解析の書 *Traité élémentaire de la théorie des fonctions et du calcul infinitesimal* を、さらに 1843 年には確率論の書 *Exposition de la théorie des chances et des probabilités* (Cournot[1843], 以下 *Exposition* と略記) を公開した。

数学者として歩み始めた Cournot が天文学や力学といった自然科学の領域を超えて、社会的領域を分析対象とし、そこに厳密な数学的分析を企てようとしたのには、革命期のフランスで Condorcet が構想した「社会数学」(*mathématique sociale*) から受けた影響が大きい¹。Laplace-Lagrange の解析力学こそが数学の王道であった時代に、かろうじて命脈を保っていたもうひとつの数学の流れである。この「社会数学」の構想には、Laplace も、そして Poisson も共鳴し、いくつかの具体的な成果も現れた。しかしながら、おもに「社会数学」が取り組んだ問題は、たとえば陪審員の証言の信頼性をいかに考えるべきか、といったいわば法学の領域に属するものであった。しかも、そのために用いられる数学的手法は数学解析ではなく、確率論であった。Cournot は、*Exposition* において、判断と証言の確率を扱っており、この「社会数学」の流れに与している。その Cournot が、法学の領域から経済学の領域に踏み込み、

¹ Condorcet の構想した「社会数学」については、隠岐[2011]が邦語文献として最も本格的な信頼できる研究書であり、まず参読されるべきである。

しかも確率論ではなく数学解析を適用した². それにはそれなりの理由があると考えるのが自然であろう.

筆者は既に拙稿[2015]において, この理由についてありうるひとつの「解釈」を提示した. そこでは, Cournot をして経済学を確率論の世界から脱却せしめ, Laplace-Lagrange の解析力学の学統に従わせることを可能ならしめたのは, 大数の法則, しかも Cournot 独特の大数の法則の理解にあった, と論じた. しかしながら, そこでは触れられなかった以下のような問題がまだ残っている. (1) 後に改めて述べるように, Cournot は大数の法則について著書の中で触れていない. もしこのことが, Cournot が大数の法則を知らなかったとか, あるいはその法則に対して否定的であったとかということを意味するのであれば, 旧稿での筆者の「解釈」はいとも簡単に崩れてしまう. まずは, そもそも Cournot は大数の法則をどのように捉えていたのか, ということを検討する必要がある.

(2) そして, Cournot が大数の法則を数学的事実として認めていたとしても, 彼の場合にはさらに慎重に検討を要する問題がある. Cournot は純粋数学の領域における数学上の定理を, 経験的な世界に無条件に適用することはなかった. Cournot にとっては, 経験的な世界においては『大数の法則』のような, 無限への収束を前提にした議論はもともと不可能であったし, 「形式科学ではなく実質的な科学の領域では, アプリオリな確率計算の無条件的適用は認められず, 何らかの人間精神の特徴ある能力の発揮としての『哲学的確率』にもとづく判定ということがどうしても必要」(伊藤[2018] p. 60.)だったのである. Cournot は, *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique* (Cournot[1851])などの著作において, こうし

² 現代的な解釈という視点でみれば, ここで確率論と数学解析を殊更に峻別することは適当ではないかもしれない. 「現代の確率論は, 測度論の言葉で叙述することによって論理的には完全に解析学の一分野になっている。」(伊藤清『岩波講座 確率論 I』(1976) p.1. 「はじめに」) ともいえるからである. しかし, 19 世紀の数学者にとっては, その認識はない.

た問題に対して哲学的な思索を重ねている。大数の法則はいかにして経験的世界に適用可能なのか、適用可能ならばその根拠は何か、これについて Cournot の思想を確認しておかなければならないだろう。彼の思想を、本稿の議論の展開に必要な限りにおいて、簡潔に整理しておくことにしたい。

以上2点——本稿は、Cournot の大数の法則をめぐるこれらの問題について、旧稿ではスキップしてしまった論理の不足を補うための覚書である。

2. Cournot の偶然論³

まずは、Cournot の偶然論を簡単にみておくことにする。

「あらゆる事象には原因がある」——これは Cournot にとって「絶対的かつ必要な規則」(Cournot[1843] Section 39)である。経験的世界は、因果の法則によって支配された「秩序」を有している。その秩序は認識主体からは独立して客観的に存在する。Cournot は、われわれの認識はこの「秩序」を見出すところに成り立つという。このように Cournot は、すべての事象が因果の法則に従っているという決定論の立場に立っているから、経験のなかに「偶然」の事象の占める位置などないとも思われよう。同じように決定論の立場を表明した Laplace は、予知できぬ偶然の出来事とは、人間の能力に限界があるがゆえの出来事でしかない、という⁴。しかし Cournot は、この道は拒否した。自然は、

³ 本節の議論は、村松[2008a][2008b]の研究に負うところがとりわけ大きい。

⁴ このあたりの事情を、Laplace 自身が語った文章として、やや長いが有名な文章を引用しておく。「したがって、われわれは、宇宙の現在の状態はそれに先立つ状態の結果であり、それ以後の状態の原因であると考えなければならない。ある知性が、与えられた時点において、自然を動かしているすべての力と自然を構成しているすべての存在物の各々の状況を知っているとし、さらにこれらの与えられた情報を分析する能力をもっているとすれば、この知性は、同一の方程式のもとに宇宙のなかの最も大きな物体の運動も、また最も軽い原子の運動をも包摂せしめるであろう。この知性にとって不確かなものは何一つないであろうし、その目には未来も過去と同様に現存することであろう。人間の精神は、天文学に与えることができた完全さのうちに、この知性のささやかな素描を提示している。人間の精神が力学と幾何学において発見したものは、万有引力の発

因果の法則で張りめぐらされているにせよ、それらのうち独立な因果系列どうしの「遭遇」(rencontre)は偶然の事象なのである。「因果性の秩序における独立した諸系列に属する諸現象の組合せないしは遭遇によって生じた出来事」が「偶然」と呼ばれる出来事である。

Cournot 自身の例をいくつか見ておこう (Cournot[1843] Section 31.)

例 1 パリの市民が、小旅行に出るため列車に乗って目的地に向かっていて、列車の事故にあって、そのパリ市民が犠牲になった。

例 2 文字の読めない人物が、でたらめに文字をひとつずつ取り出して並べた。その文字列 (Cournot の例では, Amitié) がわれわれの使っている言語で、意味のある単語(「友情」)になっていった。

例 3 別々の隊に所属する二人の兄弟が、同じ日に遠く離れた辺境で起こった戦闘でともに戦死を遂げた。

たとえば例 1 では、パリの市民が旅に出ることを思いつき、列車に乗り込むまでの因果の系列と、列車が事故を引き起こすまでの因果の系列は「独立」である。もっとも、異常なほど多くの市民たちが、一斉に旅に出ることを思いつき列車に押し寄せたといった場合には、そのことが列車の運行を乱し、事故の引き金になったともいえる。このときは、ふたつの因果系列は独立ではない⁵。このように Cournot は、複数の独立な因果系列の「遭遇」ということで、決定論的世界観と矛盾しない形で、そこに「偶然」の概念が占める位置を確保したの

見と結合することによって、同じ解析的表現のもとで世界体系の過去と未来の状態を理解できるようにした。」(Laplace[1814] 邦訳 p.10.)

⁵ 例 2 についても、文字の読めない人物が文字を次々と拾い上げて並べるという行動の系列と、ある文字列をわれわれの言語において意味をもつ単語とするまでの歴史的な出来事の系列は、因果的に「独立」であろう。また例 3 も同様に、兄と弟はそれぞれ遠く離れた部隊に属し、別々の作戦に従って戦った結果、たまたま同じ日に亡くなった。非業の死に至るまでの二人の行動の系列は因果的に「独立」であろう。

である⁶。もちろん、複数の独立な因果系列の「遭遇」そのものが、因果的に決定されているのではないか、という異論もありえるだろう。しかし Cournot の「自然観は、結局、自然のうちなる合理的秩序を認めつつ、その全体的な有機的統一は認めないという思想である。世界はそのどの部分においても、因果的な結合の支配のもとにあるが、それぞれの因果系列は全体として一つの大きな組織へと統合されることがないために、因果系列どうしを結びつける上位の自然の原理はない」(伊藤[2018] p. 64.)のである。ここでは Cournot の議論についていくという選択をしよう。

さて、このように定められた「偶然」は、認識主体から独立に存在するものであり、「偶然」の客観性を確保することによって、「偶然」は数学的確率論の対象になりうるのである。こうして Cournot は、「偶然」の確率を計算するのであるが、*Exposition* における確率の定義は、Laplace の古典的定義そのものである。すなわち、「ある事象の確率は、生じうるすべての可能な場合と、それに対するこの事象に好都合な場合の数の比率」と定める。確率を計算する偶然の事象が、複数の独立な因果系列どうしの組合せということであるから、Cournot の *Exposition* は組合せ論の教科書的な説明から始まる。そこに数学上の Cournot の独自の貢献は見あたらない。むしろ Cournot の特筆すべき貢献は、以下のことにあるというべきであろう。

Cournot は、純粋数学として経験から切り離された領域で成り立つ数学の定理が、そのまま無条件で経験の世界において成り立つとは考えなかった。数学的確率論で求められた結果が、はたして現実の世界における偶然の出来事の確率——それは複数の独立した因果系列の遭遇として測られる——を計測してい

⁶ このような Cournot の「偶然」の概念は、彼自身が認めているように、Thomas Aquinas そして Boëce に、さらには古く Aristotle にまで遡ることができる「伝統的」な考え方でもあった。ただし、Aristotle の場合には、目的因によって定められた行動の系列が、意図せざる目的を実現してしまうところに「偶然」の出来事が生じると見る。Cournot の「偶然」の定義は「目的」という心理的要因を切り離している。なお、村松[2008a] p.7 および[2008b] pp.75-76 をも参照のこと。

るのであろうか。数学的に成り立つ結果が、経験の世界に適用できることが保証されなければならなかったのである。そこで Cournot が用意したのが、理論と実在との一致を吟味する哲学的確率論 (*probabilité philosophique*) と称する議論である。それは、理論と実在の対応それ自体を吟味する議論であって、なんらかの数的評価——確率的な評価も含めて——を行うものではない。数学的確率論の結果が、経験的世界の事象と一致していることの根拠そのものの検討が求められているのである。たとえば、大数の法則を考えてみよう。Poisson にとってこの法則は、「誤ることのない経験的事実」(Poisson [1837] p. 1.)であったが、Cournot は無条件にそのようには考えなかった。Cournot にとっては、数学的定理としていかに厳密に確立されていようとも、経験の世界では無限回の試行などそもそも不可能であるから、その定理を経験的に検証することなど出来ないことが問題だったのである。そこで Cournot が持ち出したのが「物理的不可能性」(*impossibilité physique*)のテーゼであり、これが理論と実在の対応を吟味する原理であった。このテーゼによれば、数学的確率が無限小となる事象は、物理的に生じえない。つまりこのテーゼは、生起する数学的確率が限りなくゼロであると計算される事象は、経験的にも決して生じえないと評価できる、ということを主張しているのである。なぜなら、「物理的に不可能な事象を生起させる相互に独立した諸現象ないしは諸原因の偶然的な組合せが、無数に多くあるその他の組合せよりも生じやすいという理由はないからである。」(Cournot [1843], section 43.)

ここでも Cournot 自身の物理的不可能性の例をいくつか見ておこう。

例 a 円錐をその頂点を支えにして平面上に直立させること。平面上で円錐のとりうる形には無数の可能性がある。そのうち、円錐がバランスを保ち直立するのはたったひとつ通りでしかない。

例 b ある天球に他の物体が衝突する場面を想定してみる。このとき、衝撃が天球の回転運動を引き起こさないこと。つまり、衝撃が天球の中心を通る直線上だけに伝わること。

例 c 正方形の床に投影された円の中心が、正方形の対角線の交点に正確に一致すること。

これらの事象は数学的確率がゼロだと計算されるから、物理的に不可能な事象と評価される⁷(Cournot[1851] p. 38.)。この物理的不可能性のテーゼについては「古典的な先験的な思弁」(Krüger[1997] p. 73)だと異論を唱えることもできるが、ここでも再び Cournot とともに歩むことにする。Cournot は、この物理的不可能性のテーゼを、Bernoulli の定理の意味での大数の法則に適用したのである。Bernoulli の定理については次節以降で検討するが、ある事象の生起する相対頻度とそれに対応する確率との乖離(＝誤差)は、無限回の試行を行う場合には無限小であると計算できるということを主張している。Cournot の物理的不可能性のテーゼを認めるとすれば、そのような乖離(＝誤差)が、経験的世界において物理的に生じることは不可能なのである。こうして、Cournot は、Bernoulli が純粋数学の領域において確立した結果を、経験的世界に適用する道を確保したのである。言い換えれば、論理的な領域における Bernoulli の定理に、実践的な価値を付与したことになる。本稿の議論にとっては、この事実を確認するだけで十分である。

⁷ その他の例も含めて、原文は以下のように書かれている。`On regarde comme physiquement impossible qu'un cône pesant se tienne en équilibre sur sa pointe; que l'impulsion communiquée à une sphere soit précisément dirigée suivant une ligne passant par le centre, de manière à n'imprimer à la sphere aucun mouvement de rotation sur elle-même; que le centre d'un disque projeté sur un parquet carré tombe précisément au point d'intersection des diagonals; qu'un instrument à mesurer les angles soit exactement centré; qu'une balance soit parfaitement juste; qu'une mesure quelconque soit rigoureusement conforme à l'étalon, et ainsi de suite.' *Essai*, 33. p.58.

3. 大数の法則

大数の法則は，独立な試行を無限に多く繰り返すと，その結果の算術平均が期待値に収束する，という経験的法則のごとく語られることも多いが，数学的に厳密に定式化され，証明される数学の定理であり，確率変数の収束の概念の違い，仮定の強弱によっていくつかの形式のものが知られている．そのうち，歴史的には J. Bernoulli の手になる以下の古典的結果が出発点となる．今日では「大数の法則」と呼ばれることが多いが，Bernoulli 自身はこの定理⁸を「黄金定理」(Golden Theorem)と称し，「20 年の思索を経て」この結果を公表した⁹．

定理 (Bernoulli, 1713)

$X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ を同一の分布に従う独立な確率変数列とし，
 $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ とする． $p = E(X_1) < \infty$ ならば，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ．

つまり，確率収束 (convergence in probability) の意味で大数の法則が成り立つ．この定理は，直感的には無限に多くの試行を行うと，ある事象の相対頻度が p から乖離する「誤差」は無限に小さなものになる，ということを主張している．E. Borel は，1909 年に S_n/n は $n \rightarrow \infty$ のとき， p に概収束 (almost

⁸ Bernoulli は，硬貨投げのような表か裏のいずれか一方のみが生起するような独立な試行の列を考えている．ここでの定式化は，この条件を緩めた形のものであり，Bernoulli 自身のものとは異なっている．

⁹ Jakob Bernoulli の著書 *Ars Conjectandi* (『推測術』) は彼の死の 8 年後，甥の Nicolaus Bernoulli の尽力によって出版された．その著書の第 4 部における Bernoulli 自身の証明については，Todhunter [1865] Chapter 7, Stigler [1986] pp.66~70, あるいは Pearson [18] など参照のこと．彼自身の証明は，主として二項定理による各項の最大項までは順次増加し，最大項に達したあとは順次減少するという事実にもとづいている．

everywhere convergence)することを示したが、これは Bernoulli の結果をより精密にしたものである。確率収束は、概収束よりも弱い収束である。概収束するならば、確率収束するが、逆は一般的に成り立たない。このふたつの収束概念の差を強調する場合には、Bernoulli の定理を大数の弱法則と、Borel の結果を大数の強法則と称する。

Poisson は、この Bernoulli の定理を拡張した (Poisson[1837])。ある事象 E を引き起こす原因にはいくつかのものが考えられる。だから、どの原因が事象 E を引き起こしたかは、試行ごとに変わるはず、つまり試行ごとに事象 E が起こる確率は変わっているはずである。そこで i 回目の試行で事象 E が生じる確率を p_i としよう。そして、

$$p' = \frac{1}{n}(p_1 + p_2 + \cdots + p_n)$$

とする。 n 回の試行のうち E の生起する回数を S_n とおけば、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p'\right| < \varepsilon\right) \rightarrow 1 \quad \text{as } n \rightarrow \infty$$

が成り立つ。

これが Poisson による拡張であり、これを「大数の法則」と命名したのは Poisson 自身である。もちろんこれは $p_1 = p_2 = \cdots = p_n$ となる場合には、Bernoulli の定理に帰着される。Poisson はさらにふたつの拡張を行っているが、それは単にこの拡張の系でしかない。彼は、大数の法則について以下のよう述べている。

すべての事物は、大数の法則と呼ぶべき普遍的な法則に従っている。この法則は、以下のような構成をとる。一方向に系統的に偏ることなく散らばるよう

に生じる同種の事象を非常に多数観察するならば、事象が起こる比率がほぼ一定数に近いことが見いだされるのである。(Poisson [1835], p. 478.)

彼は、この法則の助けを借りて、自然科学の領域にとどまらず社会的領域においても厳密な数学的分析が可能になると考えた。この道で Cournot を鼓舞したのは、ほかならぬ Poisson であった。

Poisson は、Condorcet の提起した問題を継承して、陪審員の証言の信頼性の問題を扱った。陪審員によって証言の信頼性の高さはまちまちのはずである。Poisson の大数の法則はまさにこのような状況における問題を解くために導かれたものであった。(Hacking, [1990] Chapter12.)

しかしながら、Sheynin ([1978] p. 273.) や Martin ([1996] p. 256.) も指摘しているように、Cournot は *Exposition* において Poisson の大数の法則に言及することは一切なかった。このことは、Cournot がなんらかの意味で大数の法則に否定的であったことを意味しているのであろうか。事実は決してそうではないことを示している。

まず *Exposition* の 115 節において Cournot は、Bernoulli の定理を「確率論のあらゆる応用の唯一の確かな基礎として、必ずや最後にはそこに立ち返ってくる定理」と述べている。彼は、確率論の研究者として当然のことながら、Bernoulli の定理についてはこれを熟知していた。また、Cournot は *Recherches* が公刊されたと同じ 1838 年の論文 (Cournot [1838a]) において少なくとも 2 度、この大数の法則に触れているのである。

Cournot は *Exposition* において、Poisson の大数の法則には言及しなかったが、そこに若き確率論者 I. -J. Bienaymé の辛辣な Poisson 批判の影響を見るのは、おそらく正しい推察であろう。Cournot にとって、Bienaymé は学問的交流を通じて深く結ばれた、かけがえのない親友であった。

Poisson は、大数の法則の厳密な証明を与えることができなかった。したがって Poisson の大数の法則は、Bienaymé にとってはそもそも数学の定理とし

ての資格を欠くものであった。また、上で述べたように $p_1 = p_2 = \dots = p_n$ となる場合には、Bernoulli の定理に帰着されてしまうので、これを超えるものではない。Poisson の大数の法則は、数学的側面で新しい何かを付け加えたわけではない。だから Bienaymé は、「大数の法則なるものは存在せず」「学問の領域において、この法則が使われないことを望みたい」と痛烈に批判している。Cournot は、Bienaymé の Poisson に対する批判を斟酌して、*Exposition* において大数の法則について言及しなかったのであろう。しかし、Cournot が数学の定理として認めなかったのは Poisson の大数の法則なのである。

さて、問題はもうひとつある。確かに、Bernoulli の定理を純粋数学の領域における数学的定理として認めたとしても、その定理が経験の世界における偶然を測っていると果たしていえるのであろうか。Cournot はそのことについても思索をめぐらせていた。これについては前節において検討した通り、Cournot においては物理的不可能性のテーゼが、Bernoulli の定理を経験的にも確証することになるのであった。Bernoulli の古典的結果については、その実践的価値も認めていたのである。

Poisson が述べているように、大数の法則の帰結は、異なった試行の系列における事象の相対頻度の統計的安定、すなわち、

$$\frac{S_n}{n} \approx \frac{S_{n'}}{n'}$$

にある¹⁰。Cournot も Bernoulli の定理を援用して、*Exposition* では男女の出生比率の安定性などの例を挙げてもいる。ここでは、このことだけを確認しておくことにする。それでは Bernoulli の意味での大数の法則を、Cournot は経済学にどのように用いたのか。そのことを次節において検討していく。

¹⁰ ここで $\hat{}$ (文字の右肩のダッシュ)は、異なる試行の系列を表している。

4. Cournot の経済学方法論

Cournot の偶然をめぐる思索と Bernoulli の定理に対する態度を確認してきた。それらを踏まえてこの節では、大数の法則がいかにして経済学に数学解析を適用する道を切り開く鍵となったかを改めて整理しておく¹¹。

Cournot は、*Recherches* において大数の法則を明示的に持ち出して分析をしたわけでもない。それにもかかわらず、現代的な観点からすると、Cournot の方法論をこのように合理的に再構成できるのではないか、というひとつの定式化（＝解釈）をここで提示しようとしているのである。

Recherches を繙くと、Cournot が大数の法則を二重の意味において理解していたと推察できるのではないだろうか。ひとつは、確率論の意味における大数の法則であり、もうひとつがいわゆる「集計による円滑化効果¹²」(smoothing by aggregation)と呼ばれるものである。

[1] 確率論の意味における大数の法則

Cournot は、需要函数という概念に経済学の歴史においてはじめて明確な数学的表現を与えた。Cournot が *Recherches* において分析の出発点に据えた需要函数 $F(p)$ は、社会的に集計され平均化された需要函数である。この分析対象となる函数に数学解析が適用可能となるためには、まずもってこの函数の連続性、さらには微分可能性が満たされていなければならない。彼はこのことについて、以下のように説明している。

¹¹ この節および次節の議論は、拙稿[2015]における議論を大幅に加筆修正したものである。

¹² Ménard[1980]も、Cournot が需要函数の連続性を保証するために「大数の法則、補償の原理、そして平均の計算」に訴えていることを示唆している。ここでの補償の原理(the principle of compensation)は、集計による円滑化効果のことであると理解してよいだろう。Ménard[1980, p.533.]

われわれは需要あるいは販売の法則を表す函数 $F(p)$ をもって連続函数なりと仮定する。すなわちそれは突然にある値より他の値に移ることなく一切の中間的値をとって変動する函数である。消費者の数が著しく制限されている場合にはそうでないことがある。たとえばある家計において使用されている薪の量は薪の価格が1 ステールについて10 フランないし15 フランの場合にはおそらく変わらないであろうが、1 ステールの価格が後の数字以上に騰がるときは消費は突然に減少することがあるのである。しかし市場の範囲が広くなるほど、また消費者の必要、資力、進んでは気まぐれの組み合わせが変化に富めば富むほど、函数 $F(p)$ はますます p と共に連続的に変動することとなる¹³。(Cournot [1838] Chapter IV. 邦訳 pp. 79-80.)

上記の引用文が示しているように、Cournot は個人レベルの需要函数については、必ずしもその連続性は保証されないことを認める。Cournot にとっては、個人の需要函数が不連続となるのは、観察された事実なのであって、その不連続性の根拠を理論的に問うということはなかった。

価格のほんのわずかな上昇に応じて、需要量もほんのわずかな変化するのではなく、価格がある値に達したときに、需要量が突然に「飛びをもって」変化する——これが、需要函数が不連続であることの Cournot の表現である。Cournot 自身の叙述を読む限り、個人の需要函数が、(一価の)実数値函数として半連続(semi-continuous)¹⁴であることは否定しないまでも、たかだか半連続

¹³ Cournot はここでは、連続函数に関する中間値の定理が成り立つことをもって、函数の連続性を要請しているのである。山崎[2010] pp.300-301 も参照のこと。

¹⁴ (一価の)実数値函数 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ が上半連続あるいは下半連続になるとき、 f は半連続であるという。函数 f が点 $x_0 \in X$ において上半連続(upper semi-continuous)であるとは、 $f(x_0) < \lambda$ なる任意の実数 λ に対して、

$$f(x_0) < \lambda \quad \text{for all } x \in U$$

を満たす x_0 の近傍 U が存在することをいう。また、 $f(x_0) > \lambda$ なる任意の実数 λ に対して、

$$f(x_0) > \lambda \quad \text{for all } x \in U$$

にしかならない，ということの意味しているという山崎の解釈はきわめて自然であると思われる(山崎[2010] pp.322-323.)。しかし，それ以上の認識が Cournot にあったかどうか，これについて筆者は判断することができない¹⁵。

個人の財の需要量が，その個人の必要(besoins)，資力(fortunes)や気まぐれ(caprices)といったかなり不規則な動きをする要素にも依存していることを，Cournot は示唆している。つまり，個別的需要関数は価格だけではなく，個人の資力や気まぐれといったランダムな要素にも依存することを認めていたと考えられる。これにより，個別的な需要関数は不規則な挙動を示すことにもなっている。それに関わらず，「市場の範囲が広がるほど，また消費者の必要，資力，進んでは気まぐれの組み合わせが変化に富めば富むほど」函数 $F(p)$ の連続性が確保できるというのである。もう少し厳密にいうと，次のように定式化できるであろう。

を満たす x_0 の近傍 U が存在するとき， f は x_0 において下半連続(lower semi-continuous)であるという。さらに， f がすべての $x \in X$ において上半連続(resp. 下半連続)であるとき，単に f は上半連続(resp. 下半連続)であるという。

¹⁵ 山崎[2010]は，(1)「Cournot の個人需要の不連続性が，……需要対応として凸値にならないということだったのか，対応が上半連続性を満たさないということまでの認識があったと理解すべきか」という問題提起をし，「需要対応の上半連続性の欠如をある程度認識した不連続性の説明だと解釈できる余地はある」としている。(2) また，「Cournot の説明は，単に需要関数が半連続であるという認識のみで，それが上半連続かあるいは下半連続という区別の認識まではしていないレベルの説明だと解釈することも可能である。その場合，需要対応として上半連続とならない状況の認識はあったと解釈できることになる。」と述べている。(山崎[2010] pp.321-323.) 山崎のこれらの問題提起に対して，現在のところ筆者には答えがない。

対応あるいは多価写像 $F: X \rightarrow Y$ が点 $x_0 \in X$ において上半連続 (upper hemi-continuous) であるとは， Y における任意の開集合 $G \supset F(x)$ に対し， $x \in V$ となる適当な開集合を選べば，すべての $z \in V$ について $F(z) \subset G$ が成り立つことをいう。また，すべての $x \in X$ において上半連続であれば， $F(x)$ は上半連続であるという。なお，一価函数の upper semi-continuity, lower semi-continuity との混同を避けるために，対応の upper hemi-continuity, lower hemi-continuity に対して，優半連続性，劣半連続性という訳語を用いることもある。

いま取引の対象となる財の価格は、価格の集合 P の要素として $p \in P$ と表すことにする．主体の数は n とし、それを $i(=1,2,\dots,n)$ という記号で表示することにしよう．主体 i の需要関数は、価格ベクトル $p \in P$ ばかりではなく、必要、資力や気まぐれ等の要素にも依存しているのである．そうしたある確率空間の要素を $\omega \in \Omega$ で表すことにしよう．すると、個別的な需要関数 ξ_i は、価格 p だけではなく ω にも依存して、 $\xi_i(p, \omega)$ と書かれることになる．これは価格 $p \in P$ と $\omega \in \Omega$ との直積空間 $P \times \Omega$ 上で定義された確率変数として把握されなければならない．もし Cournot が個人の需要関数のレベルでの分析を企てようとするれば、それは数学解析の適用対象ではなく確率論の適用対象とならなければならなかったはずである．それでは、いかにして経済学を確率論の世界から脱却せしめ、しかも数学解析の適用対象として確保しえたのか．これが問題である．

Cournot が経済分析の出発点に据えたのは、この個別的な需要関数 ξ_i ではなく、社会的に集計され平均化された意味での社会的な需要関数であった．すべての主体の需要関数 ξ_i をまず加え合わせ、その平均をとってみるのである．個別的な需要関数 ξ_i が、独立かつ同一の分布 (independent and identically distributed, *i.i.d*) に従うとき、それは ξ_i の平均値 $E[\xi_i(p, \cdot)]$ に概収束する．これが大数の法則である．すなわち、ほとんどすべての ω に対して、

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \xi_i(p, \omega) \rightarrow E[\xi_i(p, \cdot)] \quad a.e.$$

が成り立つ¹⁶．社会的に集計され平均化された需要関数は、主体の数 n が限りなく大きくなるとき、その極限においてはもはや確率的偶然性を免れたものとな

¹⁶ ここでは、理論的な見通しを良くするためであって、Borel の大数の強法則を用いて定式化している．

るのである．この極限を，改めて $F(p)$ と書くことにすれば，この $F(p)$ こそが，Cournot が分析の出発点に据えたものである．

Cournot は，こうして確率論を適用する学問領域と，そうではない領域とを分けた．大数の法則によって，大量現象としての規則性が得られる場面とそうでない場面との差が，これらを分ける境界となっている．Cournot の貢献は，このように理解することができる¹⁷．

[2] 集計による円滑化効果

Cournot は，大数の法則ということによって，もうひとつ別の事柄を理解していたと考えられる．上記の引用文中に明言されているように，価格の変化に応じた個別的な需要の変化は，かなり不規則で不連続なものであるかもしれないが，その不規則な点や不連続な点がちよつとずつ異なる函数を集計して得られる需要函数は，そのような個別的な不規則性や不連続性が相殺されて連続函数となるであろうという，いわゆる集計による円滑化効果である．

確率論の意味における大数の法則と，集計による円滑化効果とは，数学的には本来別個のものとして理解されるべきである．しかしながら，Cournot にとっては，これらが混同され同じ大数の法則として一体となって理解されていたと考えられる．

¹⁷ 丸山[2008]も，Cournot が，いかにして経済学に数学解析の方法を適用することを可能ならしめたかを問題とし，Cournot による大数の理解について論じている．丸山[2008]の第三章における Cournot の「数学解析の方法」において，確率論の意味における大数の法則によって経済学を確率論的世界から脱却せしめたことを論じ終えた，その直後の脚注において「クールノーの経済分析のこのような方法論的評価を，私はかつて『創文』平成三年六月号に書いた」と述べている．しかしながら『創文』の叙述を読む限り，確率論の意味における大数の法則については読み取れない．丸山[1991]および[2008] pp.94-95 および pp.300-301 の脚注(17)を参照のこと．

いま函数 $F(p)$ をもって連続なりとすれば、それはこの種の函数のすべてに共通なる特質を有する。数学解析の幾多の重要な応用はこの性質の上に築かれているのである。すなわち価格の変動が原価格の微小部分なる限り、需要量の変動は明白に価格の変動に比例する。しかのみならず、これらの変動はその符号を異にする、換言すれば、価格騰貴は需要量の減少に相応ずるのである。(Cournot[1838] Chapter IV, 邦訳 p. 79-80.)

この一節で Cournot は連続函数の性質として「価格の変動が原価格の微小部分なる限り、需要量の変動は明白に価格の変動に比例する」という性質を挙げているが、これは函数を「局所的に線形近似」できること¹⁸、つまり函数の微分可能性を表現している。したがって、Cournot は *Recherches* においては函数の連続性と微分可能性という概念を明確に区別していなかったといえる。

それはともかく、こうして Cournot はこの集計され平均化された社会的需要函数 $F(p)$ に数学解析を適用する道を切り開いたのである。

したがって、Cournot は第一の確率論の意味における大数の法則によって、経済学を確率論的な世界から脱却せしめ、第二の意味における大数の法則(=集計による円滑化効果)によって、経済学を数学解析(=微分積分学)の適用対象とする道を開拓したのである。これにより、Cournot は、数学解析の適用可能な社会科学的領域として経済学を確保することに成功したのである。Cournot は、Condorcet 以来の「社会数学」の学統に立ち、その問題意識を共有しながらも、それを超えて経済学を Laplace-Lagrange の解析力学の伝統と融合せしめた。経済学史において、Cournot が残した貢献のうち、この方法論

¹⁸ この点について丸山[2008]は、「しかし数学史に照らしてみると、クールノーのおかしたこのスリップはやむをえぬことであったかもしれない。函数の連続性、微分可能性といった概念が厳密に識別され整理されたのは、実はクールノーの時代を代表する数学者 A・コーシー以降のことだからである」と述べている。(丸山[2008] pp.97-98.) 筆者もかつてそのような評価を述べたことがある。拙稿[1998]「ワルラスと『社会数学』の伝統」『三田学会雑誌』86 巻 2 号, pp.29-64. 脚注(42)を参照のこと。

的革新は最も重要な貢献のひとつである。そして、この貢献は、Cournot に続く次世代の経済学者に確実に受け継がれていくことになったのである。

5. Cournot から Walras へ

広く知られているように、一般均衡理論の創始者 Léon Walras は、Cournot から数学解析という経済分析の手法を学んだことを明言している。

[1] Walras と「大数の法則」

Walras も Cournot 同様、個人の需要関数是不連続であることを認めるが、社会的需要関数はいわゆる大数の法則によって連続になると主張する。不規則・不連続な個別的な需要関数から社会的需要関数の連続性を確保するために、大数の法則という名称を持ち出したのは、経済学史上 Walras がはじめてである。しかも、Walras はその大数の法則を用いた数学的操作を Cournot が行っていたものと承知している。しかし、Walras がいわゆる大数の法則を、どのように理解していたのか、ということは必ずしも分明ではない。

(クールノーがそれについて指摘したように) 諸個人においては不連続である需要と供給の変化は、大数の法則によって全体としての需要と供給のかなり連続な変化にたいする正当な理由を与えられます¹⁹。

これは、Walras が Böhm-Bawerk に宛てた書簡の一節である。Böhm-Bawerk とは、財の分割可能性の取り扱いについて話題になっていた。いま 1 種類の財のみでそれが非分割財であるとしよう。Böhm-Bawerk は、馬のように離散的な整数値でのみ取引がなされる非分割財の場合には、需要関数是不連続なものとして描けるという。これに対し Walras は、大数の法則を用いれば

¹⁹ Jaffé [1965] Letter No.777. Walras から Böhm-Bawerk への書簡。

連続な函数が得られるという。しかし、財が離散的な単位数でのみ取引され、ひとりひとりの需要函数が「とびとびな」不連続な函数として描けるならば、それをどんなに多くの主体について集計したところで連続な函数が得られることにはならないのである。そのことに Walras は気づいていないのであろうか。

主著 *Eléments d'économie politique pure* (Walras,[1874-77], 以下, *Eléments* と略記) のなかで, Walras は次のような説明をしている。

個人的曲線または個人的方程式は連続であること、すなわち p_a の無限小の増加が d_a の無限小の減少を生ずることは、なにもいっていない。それどころか、これらの函数はしばしば不連続である。例えば燕麦についていえば、小麦の所有者(1)は、価格が騰貴するにしたがって燕麦の需要を減ずるのではなく、彼の畜舎に飼養する馬を一頭減らすことを決定したときに断続的にその需要を減ずることは確かである。ゆえに彼の個人的需要函数は、実際には……段階曲線をとるであろう。他のすべての人の曲線も同様であろう。しかしながら、全部曲線……は、いわゆる大数の法則によって、ほぼ連続であると考えることができる。(Walras[1874-77] Sec.52. 邦訳 pp.58-59.)

Walras は、ひとりひとりの需要曲線が角ばった椅子のつらなった階段上の折れ線で描かれることをもって、個人的需要函数が「不連続」であるという説明をしている。さらに、山崎は、この Walras の説明が、完全分割財と非分割財の間の代替により、完全分割財に関しても需要量が不連続になるという説明だと解釈できるという指摘をしている(山崎[2010] pp. 313-314.)。というのも、完全分割可能財(引用部分の例では小麦 blé)の価格が徐々に低下していくとき、ある程度下がらなければ、非分割財(馬 cheval)の消費を 1 単位減らして完全分割財の需要の増加に割り振ることをしないからである。Walras のこの議論は、

完全分割財の需要曲線についても、それが階段上の曲線として描かれるという意味で「不連続」になるというものと解釈できる(山崎[2010] p. 313.)。これこそ Böhm-Bawerk との認識のズレを解消し、Böhm-Bawerk の批判を超える Walras の洞察であり、まさに「一般均衡理論の創始者としての真骨頂を発揮している」(山崎[2010] p. 313.)といえる。

ところで、個別的需要関数は階段状の曲線として、Walras の意味で「不連続」な曲線として描けるものとしよう。このとき、それを何人かの主体について加え合わせた曲線は、やはり角ばってはいるものの、次第に階段の段数が多くなり傾斜が緩くなっていく。主体の数が非常に多いときには、集計されて得られる社会的需要関数の形はほぼ滑らかな曲線とみなすことができる。Walras が「大数の法則」として理解していたことは、確率論の意味における大数の法則ではなく、集計による円滑化効果であったと解釈できよう²⁰。

[2] 効用の可測性

Walras は、数学解析の手法を経済分析に自覚的かつ積極的に適用した²¹。ただし彼には、Cournot とは異なる側面もある。価値・価格の決定要因として、効用という主観的要素を重視する思想を、父 Auguste Walras から直接に継承し、効用極大化をつうじて需要関数を導き出すという、Walras の一般均衡理論のひとつの根幹部分をなすロジックを完成させたのである。

²⁰ Walras は引用箇所において「 p_a の無限小の増加が d_a の無限小の減少を生ずる」と述べてはいるが、これを関数の微分可能性を意味していたと解釈するのはかなり難しい。これが、関数の「局所的に線形近似」を表現していると理解することはできない。

²¹ Walras の著書に対しては、フランスの数学者から時折厳しい批判が浴びせられた。Bertrand はその書評論文(Bertrand[1883])において、多分に曖昧な心理的要素を含む経済学のような学問に、厳密で妥協を許さぬ数学解析を適用することを批判した。また、Jevons の著書 *Theory of political economy* のフランス語版に序文を寄せた Painlevé も、効用といった心理的要素を含む経済学に対して数学解析を用いることを痛烈に批判している。Painlevé[1909]を参照のこと。

効用概念を直接に測定することの困難さから、市場における需要函数から出発することを提唱した Cassel の「価値無用論」などの立場に鑑みれば、Cournot の立場もそれなりに正しい手続きに則って展開されていることになる。しかし Cournot は、需要函数が「必要」ないしは「気まぐれ」等といった主観的な要素に依存することを認めながらも、主体の選好関係や効用函数などの定式化を行わなかったから、需要函数が「不連続」になることの説明ができなかった。Cournot にとっては、需要函数はあくまでも経験的な所与であった。こうしたことを踏まえて、需要函数ではなく効用函数から出発する Walras の分析をいかに評価すべきであろうか。

(1) まず、観察可能な需要函数から出発する分析では、需要函数それ自体が与件であるから、需要函数に関して述べられる性質は、すべて統計的ないしは帰納的に確認されるべきものであるか、あるいは恣意的な仮定とならざるをえない。そうした需要函数の性質を、単に叙述するのではなく、あるいは単に仮定するのではなく、それ以上の説明が求められるとすれば、需要函数を生成する要因にまで遡り、その生成の道筋を明らかにする必要に迫られよう。さらに、需要函数について述べられた性質が、一般的・合理的なものなのか、それとも例外的・病理的なものであるのかを問い、さらには経験的に述べられた性質以外に、需要函数の性質がないのかどうかを問うという理論的要請に答える必要があるとすれば、それは効用概念にまで遡ることによってなされるのである。

(2) また、Sonnenschein-Debreu の定理²²が示すように、需要函数が連続性、同次性、そして Walras 法則を満たしているならば、それを消費者の効用極大化の帰結として導き出すことができる。この定理の意味するところから、必ずしも現実の消費者の行動ではないかもしれないが、そうした理念的な消費者の行動を想定してみることも許されよう。

²² Sonnenschein [1972] [1973] および Debreu [1972] の議論を参照のこと。

(3) さらに、顕示選好の強公理を仮定し、需要函数が所得についてリブシッツ条件を満たすとすれば、連続な効用函数が導かれることが知られている (Uzawa [1960])。こうした前提が、かなり一般性をもって是認できる場合には、あるいはその仮定が満たされる範囲内で「経済」を語ろうとする場合には、需要函数ではなく効用函数から議論を出発させることも正当化される。

このように考えることによって効用函数から出発する議論が正当化されたとして、それに数学解析を適用することは、いかにして正当化されるのだろうか。すなわち、効用函数の微分可能性はいかにして確保されるのであろうか。

Walras はひとりひとりの効用函数が不連続であっても、それを非常に多くの人について加え合わせることによって滑らかな効用函数がえられると説明している。ここでも、大数の法則を用いているのである。しかし、現代の経済理論は、効用の可測性を前提とせず、その序数性のみを仮定し、その限りで得られる結論だけを是認する立場に立っている。この序数的効用理論の立場から見て、多くの異なった個人の効用函数を加え合わせるといった手続きは許されない。

Walras の説明に期待できないとすれば、現代的な観点から正当化を試みるのもひとつの道であろう。いくつかの解答が考えられる。

(a) まず、効用函数が連続性を満たしているならば、それを近似して滑らかな効用函数が得られる (Stone-Weierstrass の定理) が知られている。この定理を援用することによって、近似された効用函数を用いて近似的な結果を導き出すことができる。

(b) さらに、価格の変化に応じた需要の変化の方向を定めることは需要理論の重要な仕事のひとつである。現実の世界において観察されるその変化は、有限の範囲における変化であるが、それを近似的に無限小の変化として捉え直してみるのである。有限の範囲における変化の方向は、かなりの場合に無限小の変化として捉えた場合と、その変化の方向に関しては同一の結果が得られるか

ら、価格に応じた需要の変化を説明する理論的装置として滑らかな効用函数を用いることが許される。また、近似的にそのようにすることによって、数学的な操作はかなり単純化され容易なものとなるであろう。そのようなメリットも重んじられて然るべきである。

このように考えることによって、必ずしも Cournot のように考えなくとも、経済学を確率論の世界から脱却せしめることができる。さらに、Walras の方法に対しても現代的な観点から肯定的な解答を与えることができる。

6. 終わりに

本稿は、経済学に数学解析の手法をはじめて本格的に適用した Cournot の方法論を探り、数理経済学誕生をめぐる歴史のひとコマを描こうとしたものである。Cournot に方法論的革新をもたらす鍵となったのが、いわゆる大数の法則にあった。筆者の見解を要約的にまとめると次のようになる。

(1) Cournot は、Bernoulli の定理（今日、大数の弱法則と呼ばれているもの）については、積極的かつ自覚的にこれを是認し、さらに実践的問題に用いている。純粋数学の領域において確立された Bernoulli の定理が、経験的世界にも適用可能であることを保証したのが、彼独自の物理的不可能性のテーゼであった。

(2) Cournot は、大数の法則を二重の意味で理解していた。しかもそれらが明確に区別されずに、一体となって理解されていたのである。第一の意味における大数の法則は、確率論の意味における大数の法則であり、これによって経済学は確率的蓋然性から免れたものとなった。第二の意味における大数の法則は、いわゆる「集計による円滑化効果」と称されるものであり、これにより Cournot が分析の出発点に据えた需要函数 $F(p)$ の連続性——Cournot にとっては、このことがまた $F(p)$ の微分可能性をも意味していた——が確保されたのである。Cournot の方法論的思索は、このように理解することができよう。こう

して Cournot は、経済学を Laplace-Lagrange の解析力学の伝統と融合せしめることに成功したのである。

(3) Walras もまた、Cournot から数学解析の手法を経済学に適用することを学んだ。Walras は Cournot とは違い、効用函数にまで遡り、それに直接に数学解析の手法を適用した。Walras も、個人の需要函数は不連続であるが、大数の法則を援用することにより、社会的需要函数は連続になるという。ただし、Walras が大数の法則ということでどのようなことを理解していたのかは必ずしも判然とはしない。おそらく、彼のいう「大数の法則」は、確率論の意味における大数の法則ではなく、集計による円滑化効果を意味していたと推察できる。

こうして Cournot が打ち立てた数理経済学は、Walras の手を経て、確実に現代まで継承され一層の彫琢を加えられてきた。最後に、こうした数理経済学の意義について、Cournot とともに考えておくことにしたい。Cournot は、*Recherches* の序文で次のように述べている。

大いさの間の関係が問題となれる場合に、数学の符号を使用することはきわめて自然である。かりに厳密に必要ならずとしても、それが読者のある人々に縁遠いがために、またそれがときに誤って使用せられるがために、これを拒絶することは、決して合理的ではない。けだしそれは問題の叙述を容易にし、これをいっそう簡潔ならしめ、さらに広き発展への道を開き、また漠然たる討論の邪道に入ることを防ぐことができるからである。
(Cournot[1838] Preface, 邦訳 p. xviii.)

……すでに十分に数学を研究した後に、その努力を特に社会の注目する諸科学の応用に向ける人々が多数にある。社会の富の理論は、これらの人々の注意を引かざるをえない。しかしてこれを考察する場合、かれらは余と同様

に、自らに親しき符号をもって、その分析を確定的ならしめる必要を感じずるに相違ない。その分析たる、通常の言語に訴えるのみで十分であると考えた著者にあつては、一般に不確定であり、またしばしば漠然たるものである。(Cournot[1838] Preface, 邦訳 p. xix.)

Cournot の言葉を敷衍すると、次のようにもいえるであろう。経済学が他の社会諸科学に比べて、数学的手法を多用していることについては、経済学に特有な事情もあると思われる。それはまず、経済学は量的概念やそれらの量的関係を扱うことが多いという事情である。さらに経済学をはじめとする社会科学においては、自然科学とは異なり統制された実験が原理的に困難であることが多いという事情である。そうであるがゆえに、思考実験——思考の上での厳密な表現や推論——の重要性が増してくるのである。日常的な言語による表現や推論ではしばしば誤りに陥る危険がないとはいえない。だからこそ、厳密な数学的な表現や推論がより重要となるのである。

Cournot は、経済学の数学化・厳密化へ向けての努力を開始し、経済理論家の進むべきゆく手を静かに指し示したのである。

参考文献

1. Bertrand, J. [1883] Review of Walras' *Théorie mathématique de la richesse sociale* and Cournot's *Recherches sur les principes mathématique de la théorie des richesses*. Journal des Savants, pp. 499-508.
2. Bertrand, J. [1889] *Calcul des probabilités*. Paris, Gauthier-Villars.
3. Bienaymé, I.-J. [1885] Communication sur un principe que M. Poisson avait cru deecouvrir et qu'il avait appele loi des grands nombres, *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences Morales et Politique*, pp. 379-389.

4. Cassier, E. [1937] *Determinismus und Indeterminismus in der modernen Physik, Historische und systematische Studien zum Kausalproblem*, Elanders Boktryckeri Aktiebolag. (邦訳) 山本義隆訳 [2019] 『現代物理学における決定論と非決定論』 みすず書房.
5. Condorcet, M. J. [1785] *Essai sur l'application de l'analyse à la probabilité des decision rendus à la plurarité des voix*. Imprimerie Royale.
6. Cournot, A. A. [1838a] Sur les applications du calcul des chances à la statistique judiciaire, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, t. 3, pp. 257–334.
7. Cournot, A. A. [1838b] *Recherches sur les principes mathématique de la théorie des richesses*. L. Hachette. Translated by N. Bacon [1921] *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, Macmillan. (邦訳) 中山伊知郎訳 [1936] 『富の理論の数学的原理に関する研究』 岩波文庫.
8. Cournot, A. A. [1843] *Exposition de la theorié des chances et des probabilités*, ed. Bernard Bru, Librairie J. Vrin, 1984
9. Cournot, A. A. [1851] *Essai sur les fondements de nos connaissances et sur les caractères de la critique philosophique*, Edizioni Bizzarri.
10. Daston, L. [1988] *Classical probability in the Enlightenment*. Princeton University Press.
11. Daston, L. [1994] How probabilities came to be objective and subjective, *Historia Mathematica*, Vol. 21. pp. 330–344.
12. Debreu, G. [1972] Smooth preference, *Econometrica*, Vol. 44. pp. 603–615.
13. Debreu, G. [1975] Excess demand functions, *Journal of Mathematical Economics*, Vol. 1. pp. 15–21.

14. Floss, S. W. [1941] *An outline of the philosophy of Antoine-Augustin Cournot*, Philadelphia.
15. Hacking, I. [1990] *The taming of chance*. Cambridge University Press. (邦訳) 石原英樹・重田園江訳 [1999] 『偶然を飼いならす—統計学と第二次科学革命』 木鐸社.
16. Hacking, I. [2006] *The emergence of probability*. 2nd ed. (翻訳) 広田すみれ・森元良太訳 [2013] 『確率の出現』 慶應義塾大学出版会.
17. Ingrao, B. and G. Israel, [1990] *The invisible hands*, MIT Press.
18. Jaffé, W. [1965] *Correspondence of Léon Walras and related papers*, 3vols. North-Holland.
19. Laplace, P. -S. [1814] *Essai philosophique sur les probabilités*, (邦訳) 内井惣七訳 [1997] 『確率の哲学的試論』 岩波文庫.
20. Heyde, C. C., E. Seneta. [1977] *I. J. Bienaymé*, Springer-Verlag New York Inc.
21. Krüger, L., L. Daston and M. Heidelberger eds. [1987] *The probabilistic revolution*, Vol. 2, The MIT Press, (邦訳) 近昭夫他訳 [1991] 『確率革命—社会認識と確率』 梓出版社.
22. Martin, T. [1996] *Probabilité et critique philosophique selen Cournot*, Vrin.
23. Ménard, C. [1980] Three forms of resistance to statistics: Say, Cournot, Walras, *History of Political Economy*, Vol. 12, pp. 524-541.
24. Painlevé, P. [1909] 'Avant-Propos' in W. S. Jevons, *La théorie de l'économie politique*. Translated by Barranlt, H. E. M. Alfassa, V. Giard and E. Brière.
25. Pearson, K. [1925] James Bernoulli's theorem. *Biometrika*, Vol. 17, No. 3/4, pp. 201-210.

26. Poisson, S.-D. [1835] Recherches sur la probabilité des jugement, *Comptes rendus hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences*. Vol. 1. pp. 473-494.
27. Poisson, S.-D. [1836] Note sur la loi des grands nombres, *Comptes rendus hebdomadaires des Seances de l'Academie des Sciences*. Vol. 2. pp. 377-380.
28. Poisson, S.-D. [1837] *Recherches sur la probabilité des jugement en matière criminelle et en matière civile*. Paris.
29. Sheynin, O. B. [1968] On the early history of the law of large numbers, *Biometrika*, Vol. 55, No. 3, pp. 459-466.
30. Sheynin, O. B. [1978] S. D. Poisson's work in probability. *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 18, No. 3, pp. 245-300.
31. Sonnnenschein, H. [1972] Market excess demand functions, *Econometrica*, Vol. 40. pp. 549-563.
32. Sonnnenschein, H. [1973] Do Walras' identity and continuity characterize the class of community excess demand function? *Journal of Economic Theory*, Vol. 6. pp. 345-354.
33. Stigler, S. M. [1986] *The history of statistics*, Cambridge University Press.
34. Todhunter, I. [1865] *A history of mathematical theory of probability*, Thoemmes Press, 2001. (邦訳) 安藤洋美訳 [2017] 『確率論史』 現代数学社.
35. Uzawa, H. [1960] Preference and rational choice in the theory of consumption, in Arrow, K.J., S. Karlin and P. Suppes eds. [1960] *Mathematical method in the social sciences*, Stanford University Press.

36. Walras, L. [1874-77] *Eléments d'économie politique pure*, Lausanne.
(邦訳) 久武雅夫訳 [1983] 『純粋経済学要論』岩波書店.
37. 伊藤邦武 [2018] 『フランス認識論における非決定論の研究』(龍谷叢書 XLV), 晃洋書房.
38. 隠岐さや香 [2010] 「数学と社会改革のユートピア——ビュフォンの道徳算術からコンドルセの社会数学まで」, 金森修編『科学思想史』[2010] (勁草書房) 所収, pp. 127-185.
39. 隠岐さや香 [2011] 『科学アカデミーと「有用な科学」—フントネルの夢からコンドルセのユートピアへ』名古屋大学出版会
40. 隠岐さや香 [2012] 「コンドルセの社会数学——科学と民主主義への夢想」, 金森修編『合理性の考古学』[2012] (東京大学出版会) 所収, pp. 174-224.
41. 丸山 徹 [1991] 「A・クールノー—革命期フランス数学の明暗」『創文』1991年6月号, pp. 24-28.
42. 丸山 徹 [2008] 『ワルラスの肖像』勁草書房.
43. 武藤 功 [2015] 『社会数学』の学統と数理経済学の誕生」, 武藤 功・花 蘭 誠編著 [2015] 『数理経済学の源流と展開』(慶應義塾大学出版会) 所収, pp. 73-97.
44. 村松正隆 [2008a] 「クールノーの偶然論」『創文』No. 508. pp. 6-9.
45. 村松正隆 [2008b] 「偶然の確率を計算する—クールノーの確率論」, 金森修編著 [2008] 『エピステモロジーの現在』(慶應義塾大学出版会) 所収, pp. 59-92.
46. 山崎 昭[2010] 「経済分析の歴史における経済数量の認識と表現形式について—Debreu コンジエクチャーの視点から—」, 丸山徹編 [2010] 『経済学のエピメーテウス—高橋誠一郎の世界をのぞんで—』(知泉書館) 所収, pp. 295-328.